# ARITMÉTICA PITAGÓRICA

TRADUTOR

Emídio Queiroz Lopes

# INTRODUÇÃO

O sentido do número é uma natural preocupação dos professores nas primeiras tarefas do ensino da contagem.

A compreensão do número está associada à sua representação concreta, na operação de contagem de objectos, feijões, pessoas, etc., nas representações figurativa, esquemática e simbólica traduzida pelos sistemas de numeração (sistema romano, sistema decimal, ...), na linguagem, nas operações e transacções da vida diária.

O sentido do número, que não oferece dúvidas ao adulto, criado no convívio da quantidade desde o nascimento — esquecido já das suas interrogações infantis —, poderá estranhar-se na preocupação do professor com este 'singelo' tema logo no início do ensino pré-escolar.

São conhecidas as capacidades numéricas dos pássaros que, como o corvo consegue contar até quatro, bem como as dificuldades de contagem de povos aborígenes da Amazónia, de África ou da Austrália, cujas habilidades numéricas não chegam em muitos casos à dezena, passando a ser apenas 'muitos'.

Ora a criação, compreensão e sentido do número foi objecto das mais complexas investigações de cérebros privilegiados de matemáticos e filósofos, destacando-se, desde o séc. V A.C., Pitágoras, Platão, Euclides, e muitos outros.

É dessas notáveis investigações que trata A *Aritmética Pitagórica*, extraída de *A History of Greek Mathematics*, de Sir Thomas Heath, pp. 65-117 , publicada em dois volumes pela *Dover Publications*, USA, em 1981. O tradutor introduziu no texto algumas notas extraídas do *Livro II dos Elementos* de Euclides, e de outras origens.

Eliminaram-se nesta tradução as simples referências bibliográficas em rodapé, referentes a autores, coevos ou modernos, que não apresentassem explicações relativas ao texto. Do mesmo modo, as profusas expressões na língua grega, deixando-se apenas alguns exemplos; mantiveram-se as designações latinas de números complexos.

## ARITMÉTICA PITAGÓRICA

Existe muito pouca evidência coeva sobre as descobertas de Pitágoras, e aquilo que há não toca as suas matemáticas. Os mais antigos filósofos e historiadores que a ele se referem não citam estes aspectos dos seus trabalhos. Heraclito fala dos seus largos conhecimentos, mas com menosprezo: 'muita erudição não dá sabedoria; caso contrário, teria ensinado Hesíodo e Pitágoras, e ainda Xenófanes e Hecateo' Heródoto alude várias vezes a Pitágoras e aos Pitagorianos; e designa Pitágoras o mais hábil filósofo entre os gregos. Ele tinha em Empédocles um entusiástico admirador: 'mas havia entre eles um homem de prodigioso saber que adquiriu a mais profunda riqueza de compreensão e foi o maior mestre de artes hábeis de todos os tipos; pois, sempre que desejava algo de todo o coração, podia facilmente discernir toda e qualquer verdade nas suas dez — ou vinte — vidas humanas'.

Nem o próprio Pitágoras, nem qualquer dos seus imediatos sucessores, deixou alguma exposição escrita das suas doutrinas; nem mesmo Hipasus, do qual se contam diferentes histórias, (1) que foi expulso da escola por ter publicado doutrinas de Pitágoras, e (2) que tinha sido afogado no mar 'por ter revelado a construção do dodecaedro na esfera e reivindicando a descoberta como sua, ou (segundo outros) por tornar conhecida a descoberta dos números irracionais ou incomensuráveis. Nem é a ausência de qualquer registo escrito das doutrinas pitagóricas anteriores ao tempo de Filolau que possa atribuir-se a um compromisso de sigilo que vincule a escola; em todo o caso, o sigilo não se aplicou nem às matemáticas nem às físicas. O próprio segredo pode mesmo ter sido inventado para explicar a ausência de documentos. Pode ser que a comunicação oral fosse a tradição da escola, pois a sua doutrina seria em geral demasiado abstrusa para ser compreendida pela generalidade dos profanos.

Nestas circunstâncias é difícil esclarecer as partes da filosofia pitagórica que podem seguramente ser atribuídas ao seu fundador. Aristóteles, evidentemente, sentiu esta dificuldade; é claro que nada sabia ao certo de quaisquer doutrinas éticas ou físicas anteriores ao próprio Pitágoras; e quando fala do sistema Pitagoriano, refere-o sempre aos 'Pitagorianos', algumas vezes mesmo aos 'chamados Pitagorianos'.

O mais antigo testemunho directo sobre a eminência dos estudos matemáticos de Pitágoras parece ter sido o de Aristóteles, que no seu livro exclusivo *Sobre os Pitagorianos*, agora perdido, escreve que 'Pitágoras, filho de Mnesarco, o primeiro a trabalhar sobre as matemáticas e a aritmética, condescendeu, em seguida, empenhar-se conjuntamente com o admirável esforço praticado por Ferecides'

'No tempo destes filósofos (Leucipo e Demócrito) e antes deles os chamados Pitagorianos aplicaram-se no estudo das matemáticas, e foram os primeiros a avançar nesta ciência; de tal modo que, tendo sido educados nela, pensaram que os seus princípios deviam ser os princípios de todas as coisas existentes.'

É certo que a Teoria dos números teve a sua origem na escola de Pitágoras; e, com relação ao próprio Pitágoras, informa-nos Aristóxenos que ele 'parece ter atribuído suprema importância ao estudo da aritmética, que desenvolveu e estendeu ao aspecto da sua utilidade comercial'.

## Os números e o universo

Sabemos que Tales (cerca de 624-547 A.C.) e Anaximandro (nascido provavelmente em 611-10 A.C.) se ocuparam dos fenómenos astronómicos pois, mesmo antes do seu tempo, as principais constelações já tinham sido distinguidas. Pitágoras (cerca de 572 - 497 A.C. ou um pouco mais tarde) parece ter sido dos primeiros gregos a descobrir que os planetas tinham um movimento independente dos restantes astros, de Este para Oeste, isto é, em direcção oposta à rotação diária das estrelas fixas; ou podia afirmar ter descoberto planetas desconhecidos dos Babilónios. Mas, quem tivesse o hábito de estudar, observaria naturalmente que cada constelação tem duas características, o número de estrelas que a compõem e a figura geométrica que formam. Aqui, como notou recentemente um escritor, encontramos, senão a origem, uma estreita ilustração da doutrina Pitagórica. E, tal como as constelações têm um número característico de estrelas, assim todos sabemos que os objectos têm um número; como estabelece a fórmula de Filolau, 'todas as coisas que podem ser conhecidas têm um número; donde, não é possível conhecer ou conceber qualquer coisa que não tenha número'.

Esta fórmula, contudo, não exprime todo o conteúdo da doutrina Pitagórica. Nem só todas as coisas possuem números; mas, adicionalmente, todas as coisas *são* números; 'estes pensadores, diz Aristóteles, parecem considerar que o número é o princípio, quer como matéria das coisas quer como constituinte dos seus atributos e estados permanentes'. Na verdade Aristóteles parece encarar a teoria como originalmente baseada na analogia entre as propriedade das coisas e dos números.

'Eles pensam encontrar nos números mais do que no fogo, na terra ou na água, muitas semelhanças com o que as coisas são e naquilo em que as coisas se tornam; então, entre os atributos do número, um é a justiça, outro a alma, outro a mente, outro a oportunidade, etc.; e vêm ainda nos números os atributos e as razões das escalas musicais. Assim, quaisquer que sejam as coisas, parecem na sua essência assemelhar-se aos números, enquanto os números parecem ser a primeira das coisas de toda a natureza; eles [os Pitagorianos] supõem os elementos dos números constituírem os elementos de todas as coisas, e o conjunto dos céus ser uma escala musical e um número.'

Esta passagem, com a sua asserção de 'semelhanças' e 'assimilação', sugerem os números mais como afectos, estados, ou relações do que como substâncias, e o mesmo é implicado pela nota da existência de coisas pela virtude da sua *imitação* de números.[2] Mas dissemos de novo que os números não são separáveis das coisas , mas que, como coisas existentes, e mesmo substâncias perceptíveis, são artifícios de números; que a substância de todas as coisas é número, que coisas são números, que os números são feitos da unidade e que todo o firmamento são números. Ainda mais definitiva é a declaração de que os Pitagorianos 'constroem todo o firmamento de números, mas não de números *monádicos*, pois supõem que as unidades têm grandeza', e que, 'como dissemos atrás, os Pitagorianos assumem que os números têm grandeza'.

Aristóteles aponta certas dificuldades óbvias. Por um lado os Pitagorianos falam de 'este número de que se compõe o firmamento'; e por outro lado falam de 'atributos dos números' e de números como 'as *causas* das coisas que existem e residem no firmamento desde o início até agora'. De novo, segundo eles, abstracções e coisas imateriais são ainda números, que colocam em diferentes regiões; por exemplo, numa região tem lugar a opinião e a oportunidade, e noutra, um pouco mais acima ou abaixo, coisas como a injustiça, o que se vê ou o que falta. É este mesmo número 'existente no firmamento', que assumimos ser cada uma destas coisas, ora um número ora outra coisa que não seja este número?

Podemos não inferir destas notas esparsas de Aristóteles acerca da doutrina Pitagórica que 'o número no firmamento é o número de estrelas visíveis, feito de unidades' que são pontos materiais? E pode isto não ser a teoria de que todas as coisas são números, uma teoria que, certamente, seria confirmada quando foi feita a posterior descoberta capital de que as harmonias musicais dependem de razões numéricas, a oitava representa a razão 2:1 do comprimento da corda, a quinta 3:2 e a quarta 4:3?

O uso de pontos visíveis feito pelos Pitagorianos para representar as unidades de um número de uma forma particular é ilustrado pela seguinte nota de Aristóteles:

'Eurytus estabeleceu o número de qualquer objecto (por exemplo, este é o número de um homem, estoutro o de um cavalo) e imitou as formas de coisas vivas por seixos, segundo o modo como se representam por números as formas de triângulos ou dos quadrados'.

Os Pitagorianos trataram da unidade como um ponto, a qual é um ponto sem posição, e um ponto como uma unidade tendo posição.

## **Definições da unidade e do número**.

Aristóteles observou que o Um é razoavelmente encarado como não sendo ele próprio um número, porque uma medida não são as coisas medidas, mas a medida ou o Um é o início (ou princípio) do número. Esta doutrina pode ter origem nos

Pitagorianos; Nicómaco apresenta-a; Euclides subentende-a quando diz que ‘uma unidade é aquilo em virtude do qual cada uma das coisas existentes é chamada um, ao passo que um número é ‘a multidão composta de unidades’; e esta opinião é geralmente aceite. Segundo Jâmblico, Thymaridas (um antigo Pitagoriano, provavelmente anterior ao tempo de Platão) definiu a unidade como ‘quantidade limite’ ou, podemos dizer, limite dos pequenos números, enquanto alguns Pitagorianos a designaram por ‘limite entre o número e as partes’, isto é, aquilo que separa os múltiplos dos submúltiplos. Crisipo (do terceiro séc. A.C.) chamou-lhe a ‘multidão um’, definição objectada por Jâmblico como termos contraditórios, mas importante como tentativa de trazer 1 para a concepção de número.

A primeira definição de número é atribuída a Tales, que o definiu como uma colecção de unidades, ‘seguindo o ponto de vista egípcio’. Os Pitagorianos ‘criaram o número a partir de um’; alguns deles chamaram-lhe ‘progressão de multidões começando pela unidade e uma regressão que termina nela.’ (Stobaeus credita esta definição a Moderato, um Neo-Pitagoriano do tempo de Nero). Eudoxo definiu número como ‘uma multidão determinada’. Nicómaco tem já outra definição, ‘um fluxo de quantidade feito de unidades’. Aristóteles dá um número de definições equivalente a uma ou outra das já mencionadas, ‘multidão limitada’, ‘multidão (ou combinação) de unidades’, ‘multidão de indivisíveis’, ‘vários uns’ ‘multidão mensurável por um’, ‘multidão mensurável’, e ‘multidão de medidas’ (sendo a medida a unidade).

## Classificação dos números

A distinção entre ímpar e par é sem dúvida anterior a Pitágoras. Um fragmento de Filolau diz que ‘o número é de duas espécies, ímpar e par, com uma terceira, ímpar-par, com origem numa mistura das duas; e de cada espécie há várias formas.’ Segundo Nicómaco, as definições Pitagóricas de ímpar e par eram as seguintes:

Um número par é aquele que admite ser dividido, por uma e a mesma operação, nas maiores e menores partes, maiores em tamanho mas menores em número (ou seja, em duas metades) ... enquanto um número ímpar é aquele que não pode ser dividido, mas é divisível em duas partes desiguais.’

Nicómaco dá outra definição antiga, segundo a qual ‘um número par é aquele que pode ser dividido quer em duas partes iguais quer em duas partes desiguais (excepto a díada fundamental [o número dois] que só pode ser dividida em duas partes iguais) mas, contudo, qualquer que seja a sua divisão as suas duas partes devem ser *da mesma espécie*, sem qualquer parte de outra espécie (i. e. as duas partes são ambas ímpares ou pares); enquanto um número ímpar é aquele que, embora dividido, deve em qualquer caso sê-lo em duas partes desiguais, e estas partes pertencem sempre a estas duas diferentes espécies respectivamente (i. e. uma ímpar e outra par).

Na última definição expusemos a concepção original de 2 (a díada) como sendo, não exactamente um número, mas o princípio ou começo do par, tal como 'um' não é um número mas o princípio ou começo do número; esta definição implica que 2 não era originalmente concebido como um número par, sendo evidentemente a qualificação feita por Nicómaco com referência à díada uma posterior adição à definição original (Platão já fala de dois como par).

Relativamente ao termo 'ímpar-par', deve notar-se que, segundo Aristóteles, os Pitagorianos sustentam que 'o Um provém de duas espécies (o ímpar e o par) pois ele é ambas as coisas, par e ímpar'. A explicação deste estranho ponto de vista pode aparentemente provir de a unidade, sendo o princípio de todos os números, tanto pares como ímpares, não pode em si mesma ser ímpar e deve portanto chamar-se par-ímpar. Há, contudo, outra explicação, atribuída por Teão de Esmirna a Aristóteles, pelo efeito de a unidade quando adicionada a um número par originar um número ímpar, mas quando adicionada a um número ímpar originar um número par: que não poderia ser o caso se não participasse de ambas as espécies; Teão também menciona Arquitas como estando de acordo com este ponto de vista. Mas, considerando que um fragmento de Filolau fala de 'muitas formas' de espécies de par e ímpar, e 'uma terceira' (par-ímpar) obtida pela combinação delas, parece mais natural tomar 'ímpar-par' como significando, não a unidade, mas o produto de um número ímpar por um número par, enquanto, se 'par' na mesma passagem exclui um tal número, 'par' pareceria estar confinado às potências de 2, ou $2^n$.

Não sabemos quão longe os Pitagorianos avançaram nesta última elaborada classificação das variedades dos números ímpares e pares. Mas presumivelmente não foram além dos pontos de vista de Platão e Euclides. Em Platão vemos algumas vezes os termos 'ímpar-vezes ímpar', 'par vezes par' e 'par vezes ímpar' que são evidentemente usados no simples sentido de produtos de par e par, ímpar e ímpar, ímpar e par, e par e ímpar respectivamente. A classificação de Euclides não vai muito longe disto; ele não tenta fazer as quatro definições mutuamente exclusivas. Um número 'ímpar-vezes ímpar' é certamente um número ímpar não primo; mas 'par-vezes par' ('um número medido por um número par') não exclui 'par-vezes ímpar' ('um número'); por exemplo 24, que é 6 vezes 4, ou 4 vezes 6, é também 8 vezes 3. Euclides, aparentemente, não distingue, não mais do que Platão, entre 'par-vezes ímpar' e 'ímpar-vezes par' (a definição do último nos textos de Euclides foi possivelmente interpolada). Os Neo-Pitagorianos melhoraram esta classificação. Com eles, o número 'par vezes par' é aquele que tem as suas metades par, as metades das metades par e assim sucessivamente até atingir a unidade'; abreviadamente, é um número da forma $2^n$. O número 'par-ímpar' é um número tal que uma vez dividido, tem como quociente um número ímpar, i. e. um número da forma $2(2m+1)$. O número ‘ímpar-par’ é um número que pode ser dividido duas ou mais vezes sucessivamente, mas o quociente, quando já não pode ser prosseguido é um número ímpar diferente da unidade, i. e. um número da forma $2^{n+1}$ (2m+1); segundo eles os números ímpares dividem-se em (*a*) primos e incompósitos, que são os primos de Euclides excluindo 2, (*b*) os secundários e compósitos, os factores dos quais devem ser todos não só números ímpares mas primos, ( *c* ) aqueles que são ‘secundários e compósitos em si mesmos mas primos e incompósitos para outro número,’ por exemplo, 9 e 25, que são ambos secundários e compósitos em si mesmos mas não têm medida comum excepto 1. O inconveniente da restrição em (*b*) é óbvio, e há a posterior objecção de que (*b*) e ( *c* ) se sobrepõem; de facto, (*b*) inclui todo o ( *c* ).

## Números ‘Perfeitos’ e ‘Amigos’

Não há vestígios nos fragmentos de Filolau, em Platão ou Aristóteles, ou antes de Euclides, de número perfeito no bem conhecido sentido da definição de Euclides (VII. Def. 22), um número, nomeadamente, que é igual à soma das suas partes próprias (isto é, de todos os seus factores incluindo 1), e. g.

$$6=1+2+3; \qquad 28=1+2+4+7+14$$
$$496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$$

A lei de formação destes números é demonstrada em Eucl. IX. 36, o que significa que, se a soma de um número qualquer de termos da série 1, 2, $2^2$, $2^3$, .... $2^{n-1}$, (= $S_n$) é primo, então $S_n.2^{n-1}$ é um número ‘perfeito’. Teão de Esmirna e Nicómaco definiram ambos um número ‘perfeito’ e explicaram a lei da sua formação; eles distinguiram posteriormente duas espécies de números, (1) sobre-perfeito, assim chamado porque a soma de todas as suas partes alíquotas é muito maior que o próprio número, e.g. 12, que é menor do que 1+2+3+4+6, (2) *defectivo,* assim chamado porque a soma é menor que o próprio número, e.g. 8, que é maior do que 1+2+4. Nicómaco não conheceu mais do que quatro números perfeitos (nomeadamente 6, 28, 496, 8128). Ele disse que eles são formados ordenadamente, estando um entre as unidades (i.e. inferior a 10), um entre as dezenas (menor que 100), um entre as centenas (menor que 1000) e outro entre os milhares (menor que 10 000); adiantou ainda que eles terminam alternadamente em 6 e 8. Eles fazem todas as terminações em 6 ou 8 (como podemos facilmente comprovar pela fórmula $(2^n-1)2^{n-1}$, mas não alternadamente, pois o quinto e o sexto números perfeitos terminam ambos em 6, e o sétimo e o oitavo terminam em 8. Jâmblico adiciona a tentativa de uma sugestão do que pode de certo modo ser um número perfeito entre as primeiras dezenas de milhar (inferiores a $10000^2$ ), e entre as segundas dezenas de milhar (menores que $10000^3$ ), e assim *ad infinitum*. Isto é incorrecto, porque os próximos números perfeitos são como segue:

| | |
|---|---|
| fifth | $2^{12}$ ($2^{13}$-1)= 33 550 336 |
| sixth | $2^{16}$ ($2^{17}$-1)= 8 589 869 056 |
| seventh | $2^{18}$ ($2^{19}$-1)= 137 438 691 328 |
| eighth | $2^{30}$ ($2^{31}$-1)= 2 305 843 008 139 952 128 |
| ninth | $2^{60}$ ($2^{61}$-1)= 2 658 455 991 569 831 744 654 692 615 953 842 176 |
| tenth | $2^{88}$ ($2^{89}$-1) |

Com estes números perfeitos devem comparar-se os chamados 'números amigáveis'. Dois números são amigáveis quando cada um é a soma de todas as partes alíquotas do outro, e.g. 284 e 220 (pois 284=1+2+4+5+10+ 11+20+22+44+55+110, enquanto 220 = 1+2+4+71+142). Jâmblico atribui a descoberta de tais números ao próprio Pitágoras, que, sendo-lhe perguntado 'o que é um amigo?' respondeu '*Alter ego*', e nesta analogia aplicou o termo 'amigável' a dois números cujas partes alíquotas de qualquer deles fazem parte do outro. [e.g. 1+2+3+4+5+11+55+142]

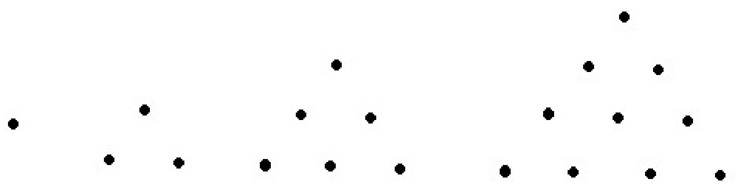
Enquanto para Euclides, Teão de Esmirna e os Neo-Pitagorianos o número perfeito era a espécie de número acima descrito, dissemos que os Pitagorianos consideravam 10 o número perfeito. Aristóteles afirmou que assim era porque encontravam nele coisas tais como o vazio, a proporção, a imparidade, etc. Isto é explicado em maior detalhe por Teão de Esmirna e num fragmento de Speusipo. 10 é a soma dos números 1, 2, 3, 4 formando o *tetrarcus* ( 'o seu maior juramento', alternativamente chamado o 'princípio da saúde'). Estes números incluem as correspondentes razões dos intervalos musicais descobertos por Pitágoras, designadamente 4 : 3 (o quarto) 3 : 2 (o quinto), e 2 : 1 (o oitavo). Speusipo observou posteriormente que 10 contém em si as variedades 'linear', 'plana' e 'sólida' do número; porque 1 é um ponto, 2 é uma linha, 3 um triângulo e 4 uma pirâmide.

## Números figurados.

A afirmação precedente transporta-nos uma vez mais à teoria dos números figurados, que parece remeter ao próprio Pitágoras. Um ponto ou pequena marca é usado para representar 1; dois pontos afastados definem a recta que os une; três pontos, representa 3 e assinala a primeira figura plana — o triângulo; quatro pontos, um dos quais está fora do plano que contém os outros três, representa 4 e também define a primeira figura sólida. Torna-se claro que os mais antigos Pitagorianos estavam familiarizados com a formação de números triangulares e quadrados com pequenos seixos ou pontos; e supomos, pelo testemunho do livro de Speusipo, *Sobre os números Pitagorianos*, baseado nos trabalhos de Filolau, que este último lidava com números lineares, números poligonais, e números planos e sólidos de todos os tipos, bem como com cinco figuras sólidas regulares. As variedades de números planos (triangular, quadrado, oblongo, pentagonal, hexagonal, etc.) e de números sólidos (cubo, piramidal, etc.) bem como os métodos da sua formação, são tratados por Nicómaco e Teão de Esmirna.

## (α) Números Triangulares.

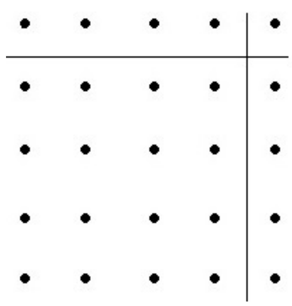
Comecemos com números triangulares. Provavelmente foi Pitágoras quem descobriu que a soma de qualquer número de termos da série dos números naturais 1, 2, 3 ... começando por 1 forma um número triangular. Isto é bastante óbvio observando os seguintes arranjos de filas de pontos;



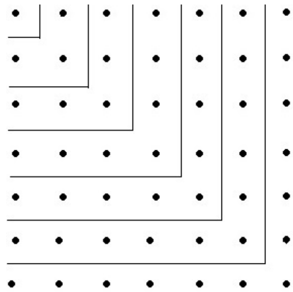
assim $1 + 2 + 3 + ... + n = ½n(n+1)$ é um número triangular de lado $n$. O triângulo particular que tem por lado 4 é mencionado numa história de Pitágoras por Luciano. Pitágoras encarregou alguém para contar; e ele disse 1, 2, 3, 4, ao que Pitágoras interrompeu, 'Vês ? O que tu tomas por 4 é 10, um triângulo perfeito e o nosso juramento'. Isto liga o conhecimento dos números triangulares com as verdadeiras ideias Pitagorianas.

## (β) Números quadrados e gnómones.

Quanto aos números *quadrados,* é fácil ver que, se temos um número de pontos formando e preenchendo completamente um quadrado, como se vê na figura junta, que representa 16 — o quadrado de quatro — o próximo quadrado mais elevado é o quadrado de 5, que pode ser formado adicionando uma fila de pontos à volta de dois lados do quadrado original, como é visível. O número destes pontos é $2 \times 4 + 1$ ou 9. Este processo de formar outros quadrados pode ser



aplicado sucessivamente, começando pelo primeiro quadrado, o número 1. A figura seguinte mostra as sucessivas adições entre os sucessivos pares de linhas rectas



formando ângulos rectos; e os sucessivos números adicionados a 1 são 3, 5, 7, ... $(2n + 1)$, isto é, os sucessivos números ímpares. Este método de formação mostra que a soma de qualquer número dos sucessivos termos das séries dos números ímpares, 1, 3, 5, 7, ..., começando por 1, é um número quadrado e que, se $n^2$ é qualquer número quadrado, a soma dos números ímpares $2n+1$ transforma-o no próximo quadrado $(n+1)^2$ , e que a soma da série dos números ímpares

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n+1) = (n+1)^2 ,$$

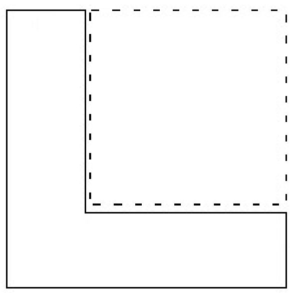
enquanto

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2 .$$

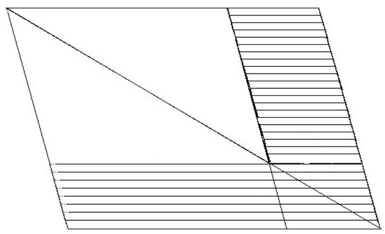
Tudo isto era conhecido de Pitágoras. Os números ímpares sucessivamente adicionados eram chamados *gnómones*; isto é claro desde a alusão de Aristóteles aos gnómones dispostos em torno de 1 que produzem sempre diferentes figuras (figuras oblongas, cada uma das quais diferente da precedente), preservando uma e a mesma figura (quadrados); sendo a última formada com os gnómones agora em questão.

## (γ) História do termo ‘gnómon’

Foi dito que os gnómones desenhados na figura anterior correspondem na forma aos gnómones geométricos que Euclides tornou familiares no Livro II. A história do termo ‘gnómon’ é interessante. (1) originalmente era um instrumento astronómico para a medida do tempo, e consistia num esquadro em ângulo recto que projectava sombras num plano ou superfície hemisférica.

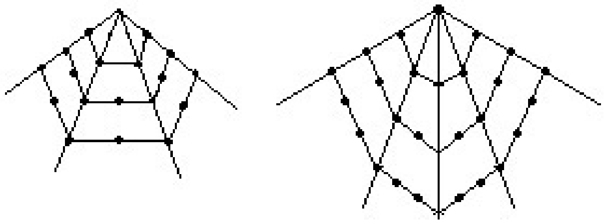


Diz-se que este instrumento foi introduzido na Grécia por Anaximandro, proveniente de Babilónia. De acordo com este significado da palavra 'gnómon' (um 'marcador' ou 'ponteiro', um meio de ler e conhecer alguma coisa), encontramos Oenópides que chama '*gnómon-sábio*' a uma perpendicular a uma recta traçada de um ponto exterior. Em seguida, (2) encontramos o termo aplicado a um instrumento para traçar ângulos rectos, que tem a forma da figura anterior. Parece ser este o citado em Teognis p. 805, onde se diz que o instrumento enviado para consultar o oráculo em Delfos deveria ser 'mais recto do que o *τόρνος* (instrumento com um fio esticado para traçar um círculo), o *στάθμη* (um fio de chumbo) e o *gnómon*'. Era natural que, devido à sua forma, o gnómon fosse então usado para descrever (3) a figura que resultava de um quadrado quando se cortava um quadrado mais pequeno, a tracejado na figura (ou a figura que, como diz Aristóteles, quando adicionado um quadrado preserva a forma e reproduz um quadrado maior. O termo é usado num fragmento de Filolau onde este diz que 'o número torna todas as coisas cognoscíveis e mutuamente concordantes com as características do *gnómon*'. Presumivelmente, segundo Boeckh, a conexão entre o gnómon e o quadrado que lhe é adicionado era encarada como uma união simbólica e harmónica, e Filolau usou a ideia para explicar o conhecimento de coisas, fazendo o conhecimento abraçar o saber como o gnómon abraça o quadrado. (4) Em Euclides o significado geométrico da palavra é posteriormente estendido (II. Def. 2) para abranger, em vez do quadrado, a figura semelhante para 'qualquer paralelogramo cujo diâmetro (diagonal) contenha os dois complementos'. Posteriormente, Herão de Alexandria definiu um *gnómon* em geral como aquilo que adicionado a qualquer coisa, número ou figura, torna o conjunto semelhante ao que foi adicionado.



## (δ) Gnómones de números poligonais.

Teão de Esmirna usou o termo no seu sentido geral relativamente aos números: 'Todos os sucessivos números que por adição continuada produzem triângulos ou quadrados ou *polígonos* são chamados gnómones'. Das figuras seguintes que mostram dois números sucessivos pentagonal e hexagonal vê-se que as linhas exteriores ou gnómones sucessivamente adicionadas após 1 (que estão no primeiro pentágono,



hexágono, etc.,) são, no caso do pentágono 4, 7, 10, ..., ou os termos de uma progressão aritmética começada por 1 com a diferença comum 3, e no caso do hexágono, 5, 9, 13, ..., são os termos de uma progressão aritmética tendo como diferença comum 4. Em geral, os sucessivos números gnomónicos de qualquer número poligonal de n lados, têm (n-2) por diferença comum.

## (ε) Triângulos de ângulos rectos tendo por lados números racionais.

Voltemos a Pitágoras. Quer tivesse ou não aprendido o facto do Egipto, Pitágoras sabia certamente que, sendo $3^2 + 4^2 = 5^2$, qualquer triângulo com os seus lados na razão dos números 3, 4 e 5 tem um ângulo recto. Este facto não podia deixar de reforçar a sua convicção de que todas as coisas eram números, pois estabelecia uma ligação entre os números e os ângulos das figuras geométricas. Isto levaria igualmente a uma tentativa de encontrar outros númenos quadrados superiores a $5^2$ que fossem a soma de dois quadrados, ou, por outras palavras, encontrar outro conjunto de três números inteiros que pudessem ser os lados de triângulos rectângulos; e temos aqui o início da *análise indeterminada* que atingiu com Diofanto um alto estado de desenvolvimento. De acordo com o facto de a soma de qualquer número dos termos de uma série de números ímpares, 1, 3, 5, 7, ..., começada por 1, ser um quadrado, era apenas necessário separar desta série, os números ímpares que são eles mesmos quadrados, digamos 9; a soma deste quadrado com o quadrado que é a soma de todos os precedentes números ímpares, perfaz um número quadrado que é a soma dos números ímpares até ao número que tomámos (9). [16 + 9 = 25 ou $4^2 + 3^2 = 5^2$]. Mas seria natural pesquisar a fórmula que permite encontrar imediatamente os três números do conjunto, fórmula que é actualmente atribuída a Pitágoras.[1] Esta fórmula equivale à declaração de que, se $m$ é qualquer número ímpar,

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right) = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)$$

Presumivelmente, Pitágoras chegou a este resultado pelo seguinte caminho: observando que o gnómon em torno do quadrado $n^2$ é $2n+1$, apenas teve de transformar $2n+1$ num quadrado.

Se supusermos que $2n + 1 = m^2$

obtemos $n = \frac{1}{2} (m^2 - 1)$

e portanto $n + 1 = \frac{1}{2} (m^2 + 1)$.

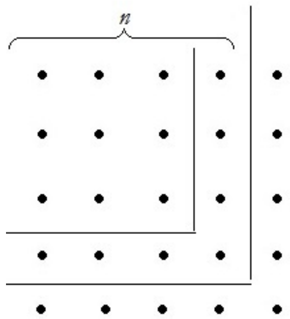
Segue-se que

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

Outra fórmula, obtida com o mesmo propósito, é atribuída a Platão, nomeadamente

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

Podemos obter esta fórmula a partir da fórmula de Pitágoras dobrando ambos os lados de cada quadrado; mas estaria incompleta se fosse assim obtida, pois na fórmula de Pitágoras *m* é necessariamente ímpar, enquanto em Platão não precisa sê-lo. Como a fórmula de Pitágoras foi muito provavelmente obtida de gnómones de pontos é tentador supor que Platão tenha procedido de forma semelhante. Consideremos um quadrado com lados de *n* pontos nos seus lados em relação ao próximo quadrado mais pequeno contenha $(n - 1)^2$ e o quadrado imediato $(n + 1)^2$ .




Então $n^2$ excede $(n - 1)^2$ por um gnómon $2n - 1$, mas fica aquém de $(n + 1)^2$ por um gnómon $2n + 1$. Portanto o quadrado $(n + 1)^2$ excede o quadrado $(n - 1)^2$ pela soma de dois gnómones $2n + 1$ e $2n - 1$, ou seja, $4n$.

Isto é,

$$4n + (n - 1)^2 = (n + 1)^2$$

e, substituindo $m^2$ por $n$ para formar um quadrado $4n$, obtemos a fórmula platónica

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$$

As fórmulas de Pitágoras e Platão completam-se uma à outra. A solução de Euclides (X, Lema seguinte à Prop. 28) é mais geral, e equivale ao seguinte.

Se *AB* é uma linha recta bissectada em *C* e prolongada até *D*, então (Eucl. II. 6)

$$AD \,.\, DB + CB^2 = CD^2$$

que podemos escrever como

$$uv = c^2 - b^2$$

onde

$$u = c + b \qquad v = c - b$$

e consequentemente

$$c = \frac{1}{2}(u+v), \quad b = \frac{1}{2}(u-v)$$

Uma vez que *uv* deve ser um quadrado, diz Euclides, *u* e *v* devem, se não são actualmente quadrados, ser ‘ números planos semelhantes’, e ademais devem ser ambos ímpares ou ambos pares de modo que *b* (e também *c* ) deve ser um número inteiro. Números ‘planos semelhantes’ são, naturalmente, o produto de dois factores, em partes proporcionais [a $p^2$ e a $q^2$], como $mp.np$ *e* $mq.nq$ ou $mnp^2$ e $mnq^2$ . Na condição de estes números serem ambos pares ou ambos ímpares,

$$m^2n^2p^2q^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2$$

é a solução, que inclui as fórmulas de Pitágoras e de Platão.

## (ζ) Números oblongos.

Pitágoras, ou os mais recentes Pitagorianos, tendo descoberto que, por adição de qualquer número dos termos sucessivos (começando por 1) das séries

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

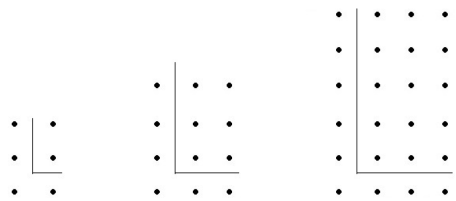
obtemos números triangulares, e por adição dos sucessivos números ímpares

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

obtemos quadrados, não oferece dúvida que, do mesmo modo, somadas as séries dos números pares

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \times (n-1)$$

descobriram, em consequência, que a soma de qualquer número dos sucessivos termos das séries começadas por 2 eram números oblongos, com ‘lados’ou factores diferindo de 1. Veriam assim que o número oblongo é duplo do número triangular. Estes factos põem em evidência que tomando dois pontos representando 2 e colocando-os sucessivamente em torno do gnómon-sábio, ficam representados os números pares 4, 6, etc., como mostra a figura:

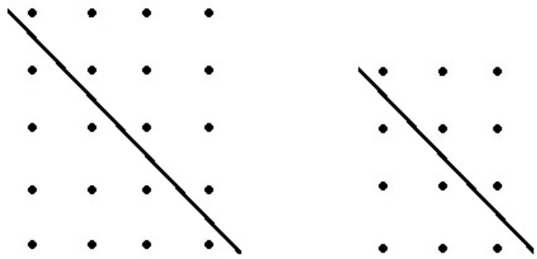


Os sucessivos números oblongos são então

$$2.3 = 6, \quad 3.4 = 12, \quad 4.5 = 20, \quad , n\,(n + 1) ...,$$

e é claro que não há dois desses números que sejam semelhantes, pois a razão $n : (n + 1)$ é diferente para todos os diferentes valores de $n$. Podemos ter aqui uma explicação de ‘ímpar’ como ‘limite’ ou ‘limitado’ e de ‘par’ como ‘ilimitado’ (cf. o esquema Pitagoriano de dez pares de opostos, onde ímpar, limite e quadrado num conjunto são opostos a par, ilimitado e oblongo respectivamente). Pois que, enquanto a adição dos sucessivos números ímpares como gnómones em torno de 1 origina apenas uma forma, o quadrado, a adição de sucessivos números pares a 2 gera a sucessão de números ‘oblongos’ todos de forma dessemelhante, que é o mesmo que dizer, uma infinidade de formas. Isto parece estar indicado numa passagem onde, da *Física* de Aristóteles, como ilustração da opinião de que o par é ilimitado, diz que, onde os gnómones são colocados em volta 1, as figuras resultantes são, num caso sempre de espécie diferente, enquanto noutro caso preservam sempre a sua forma; esta forma é com certeza um quadrado formado pela adição de números ímpares como gnómones em torno de 1; as palavras κα`ιχωρίς (‘e no caso separado’ como podemos talvez traduzir) descreve imperfeitamente o segundo caso, pois que neste caso os números pares são colocados em volta de 2 e não de 1, mas o significado parece claro. Note-se que a palavra `ετερομηκες (oblongo) é em Teão de Esmirna e Nicómaco limitada aos números que são o produto de dois factores que diferem de uma unidade, enquanto eles aplicam o termo προμήκης (‘prolato’ por assim dizer) aos números que são o produto de factores que diferem duas ou mais unidades (para Teão προμήκης inclui `ετερομηκες). Em Platão e Aristóteles `ετερομηκης tem o sentido mais amplo de um número não quadrado com dois factores desiguais.

É óbvio que qualquer número ‘oblongo’ $n\,(n+1)$ é a soma de dois números



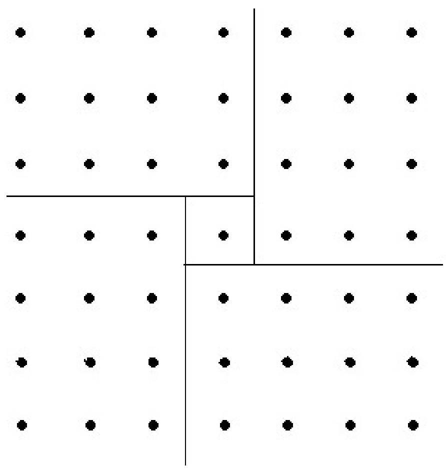
triangulares iguais. Muito menos óbvio é o teorema de Teão de que qualquer número quadrado é feito de dois números triangulares; neste caso, como se vê da figura, os lados dos triângulos diferem de uma unidade e consequentemente

$$\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)=n^2$$

Outro teorema relacionado com os números triangulares e quadrados, nomeadamente, que 8 vezes qualquer número triangular +1 forma um quadrado, pode ser atribuído aos primitivos Pitagorianos. Anotado por Plutarco e usado por Diofanto, é equivalente à fórmula

$$8.\frac{1}{2}n(n+1)+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$$

Esta fórmula pode provar-se facilmente por meio da figura pontuada da forma usual. Dois triângulos iguais formam uma figura oblonga da forma *n* (*n*+1), como anteriormente. Portanto, temos de provar que quatro figuras iguais a esta forma



A figura, representando $7^2$, mostra como se pode dividir 3×4 em quatro figuras oblongas excluindo 1.

Comentando Speusipos, Philipos de Opus (séc. IV), editor das *Leis* de Platão, autor do *Epinomis*, diz-se ter escrito um trabalho sobre números poligonais.

Hypsicles, que escreveu cerca de 170 B.C., é mencionado duas vezes por Diofanto em *Número Poligonais* como autor de uma 'definição' de um número poligonal.

**Teoria das proporções e das médias.**

O 'sumário' de Proclus (no início do capítulo IV) relata (se o escrito de Friedlein está correcto) que Pitágoras descobriu a 'teoria dos irracionais e a construção de figuras cósmicas' (os cinco sólidos regulares) . Estamos limitados à primeira parte deste relato na medida em que a leitura άλόγων ('irracionais') é disputada. Fabrício parece ter sido o primeiro a registar a variante άναλόγων, que é também referida por E. F. August; Mullach adoptou este termo de Fabrício. άναλόγων não é a forma correcta da palavra, cujo significado seria 'proporções', ou mais provavelmente, των ἀνὰ λόγον ('proporcionais'); Diels escreve των ἀνὰ λόγον e quereria significar que há agora consenso de que a palavra άλόγων está errada, e que a teoria que Proclus atribui a Pitágoras é a teoria das *proporções* ou *proporcionais*, não dos irracionais.

(α) *Médias aritméticas, geométricas e harmónicas.*

É verdade que não temos a certeza do uso, por Pitágoras, das proporções em geometria, embora ele se deva ter familiarizado com figuras geométricas semelhantes, o que implica alguma teoria das proporções. Mas a descoberta da pendência dos intervalos musicais de razões numéricas, e a teoria das *médias* foi desenvolvida muito cedo nesta escola, relativamente à teoria da música e a aritmética. Dissemos que no tempo de Pitágoras havia três médias, a aritmética, a geométrica e a subcontrária, e que o nome da terceira ('subcontrária') foi alterado por Arquitas e Hipasus para 'harmónica'. Um fragmento do trabalho de Arquitas, *Sobre Música*, define actualmente o terceiro: temos uma média *aritmética* quando, dos três termos, o primeiro excede o segundo pela mesma quantidade que o segundo excede o terceiro; uma média *geométrica* quando, dos três termos, o primeiro esta para o segundo como o segundo está para o terceiro; a 'subcontrária, que chamamos *harmónica*', quando os três termos são tais que 'por qualquer parte de si mesma, a primeira excede a segunda, a segunda excede a terceira pela mesma parte da terceira'. Isto é, se $a$, $b$ e $c$ estão em progressão harmónica, e $a=b + a/n$ , devemos ter $b=c+c/n$, quando de facto

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$$

Nicómaco também diz que o nome 'média harmónica' foi adoptado de acordo com a opinião de Filolau acerca 'média harmónica geométrica', um nome aplicado ao cubo, porque tem 12 arestas, 8 ângulos e 6 faces, e 8 é a média entre 12 e 6 segundo a teoria dos harmónicos.

Jâmblico, segundo Nicómaco, faz menção especial a uma ‘proporção mais que perfeita’ de quatro termos, denominada ‘musical’que, segundo a tradição, foi descoberta pelos Babilónios e foi primeiro introduzida na Grécia por Pitágoras. Foi usada, disse ele, por muitos Pitagorianos, e.g. (entre outros) Aristeu de Cróton, Timeu de Lócri, Philolau e Arquitas de Tarento, e finalmente por Platão no *Timeu*, onde somos informados de que os intervalos duplo e triplo foram preenchidos por duas médias, um dos quais excede e é excedido pela mesma parte dos extremos (a média harmónica) e a outra excede e é excedida pela mesma grandeza numérica (a média aritmética). A proporção é

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b$$

sendo um exemplo  12 : 9 = 8 : 6.

(β) *Distinguem-se sete outras médias*

A teoria das médias foi posteriormente desenvolvida na escola [Pitagórica] pela adição gradual de outras sete às primeiras três. Os relatos da descoberta da quarta, quinta e sexta não são suficientemente consistentes. Num local, Jâmblico diz que foram adicionados por Eudoxo; e noutro acrescenta que foram usados pelos sucessores de Platão até Eratóstenes, mas que Arquitas e Hipasus as descobriram ou, segundo a tradição, tomaram parte na sua descoberta. As últimas quatro (da sétima à décima) diz-se terem sido acrescentadas pelos dois últimos Pitagorianos, Mionides e Eufranor. Numa nota de Porfírio apareceria que uma das primeiras sete parece ter sido descoberta por Simus de Posidónia, mas que a inveja de outros Pitagorianos lhe roubaram o crédito. As dez médias são descritas por Nicómaco e Papus;os seus registos apenas diferem numa das dez. Se $a > b > c$, as fórmulas na terceira coluna da seguinte tabela mostram as várias médias.

| No. in Nicom. | No. in Papus | Fórmulas | Equivalente |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$ | $a+c=2b$ (aritmética) |
| 2 | 2 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}\left[=\frac{b}{c}\right]$ | $ac=b^2$ (geométrica) |
| 3 | 3 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ | $1/a + 1/c=2/b$ (harmónica) |
| 4 | 4 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$ | $a=b+c-c^2/b$ (sub-contrária a sub-harmónica) |
| 5 | 5 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$ | $c=a+b-a^2/b$ (sub-contrária a sub-geométrica) |
| 6 | 6 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$ | $c^2 -= 2ac-ab$ |
| 7 | (omitido) | $\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{c}$ | $a^2 + c^2 -= a(b+c)$ |
| 8 | 9 | $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$ | $b^2 + c^2 -= c(a+b)$ |
| 9 | 10 | $\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$ | $a = b+c$ |
| 10 | 7 | $\frac{a-c}{a-b}=\frac{b}{c}$ | $a^2 -= 2ab-bc$ |
| (omitido) | 8 | $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{b}$ | |

O conjunto das duas listas dá *cinco* médias na adição para os primeiros seis que são comuns a ambos; haverá mais seis (como disse Teão de Esmirna) onde notou que $\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{b}$ é ilusória, pois dá $a=b$ . Tannery notou que os N$^{os}$ 4, 5 e 6 das médias anteriores dão equações do segundo grau, e concluiu que a solução geométrica e mesmo a aritmética destas equações eram conhecidas do descobridor destas médias desde o tempo de Platão; Hipócrates de Quios encontrou a solução geométrica de uma equação mista do segundo grau na sua *Quadratura da Lúnula*.

Papus tem uma interessante série de proposições a respeito de oito das dez médias por ele definidas. Observou que se α, β, γ são três termos em progressão geométrica, podemos formar a partir destes três termos outros termos *a, b, c,* funções lineares de α, β, γ que satisfazem respectivamente oito das dez relações acima citadas; isto é, deu a solução de oito problemas em análise indeterminada do segundo grau. As soluções são as seguintes:

| No. in Nicom. | No. in Papus | Fórmulas | Solução em termos de α, β, γ | Solução mínima |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ | a = α + 2β + γ<br>b = + β + γ<br>c = γ | a = 4<br>b = 2<br>c = 1 |
| 3 | 3 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ | a = 2α + 3β + γ<br>b = 2β + γ<br>c = β + γ | a = 6<br>b = 3<br>c = 2 |
| 4 | 4 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$ | a = 2α + 3β + γ<br>b = 2α + 2β + γ<br>c = β + γ | a = 6<br>b = 5<br>c = 2 |
| 5 | 5 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$ | a = α + 3β + γ<br>b = α + 2β + γ<br>c = β + γ | a = 5<br>b = 4<br>c = 2 |
| 6 | 6 | $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$ | a = α + 3β + γ<br>b = α + 2β + γ<br>c = α + β - γ | a = 6<br>b = 4<br>c = 1 |
| — | 8 | $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{b}$ | a = 2α + 3β + γ<br>b = α + 2β + γ<br>c = 2β + γ | a = 6<br>b = 4<br>c = 3 |
| 8 | 9 | $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$ | a = α + 2β + γ<br>b = α + 2β + γ<br>c = 2β + γ | a = 4<br>b = 3<br>c = 2 |
| 9 | 10 | $\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$ | a = 2α + 3β + γ<br>b = β + γ<br>c = γ | a = 3<br>b = 2<br>c = 1 |

Papus não incluiu as soluções correspondente ao Nº 1 e ao Nº 7, e Tannery sugere como razão que, nestes casos, sendo as equações já lineares, não há necessidade de assumir $\alpha\gamma = \beta^2$, e, por consequência, com demasiadas indeterminações. Papus não prova simplesmente os seus resultados, transforma a proporção $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ em todos os seus aspectos, *compondo*, *dividindo*, etc.

*(γ) As médias geométricas de Platão entre dois quadrados e dois cubos.*

É bem conhecido que as matemáticas no *Timeu* de Platão são essencialmente Pitagóricas. É portanto provável *a priori* que Platão *πυθαγορίζει* [pitagoriano] na passagem onde diz que entre dois planos, uma média é suficiente, mas para ligar dois sólidos são necessários duas médias. Por planos e sólidos ele realmente quer dizer quadrados e cubos de números,

$$p^2 : pq = pq : q^2$$

enquanto que, se $p^3$, $q^3$ são dois números cúbicos,

$$p^3 : p^2 q = p^2 q : pq^2 = pq^2 : q^3$$

estando certamente as médias em proporção geométrica contínua. Euclides prova as propriedades para os números quadrados e os cúbicos em VIII. 12, e, para números planos e sólidos semelhantes, em VIII. 18. 19. Nicómaco cita a substância da nota de Platão como um 'teorema Platónico', adicionando como explicação o teorema equivalente de Euclides VIII. 11. 12.

### *(δ) Um teorema de Arquitas*

Outro teorema interessante relativo às médias geométricas significa, evidentemente regressar aos Pitagorianos. Dados dois números numa razão conhecida como επιμοριος, ou *super-particulares,* isto é na razão $n+1$ para $n$, não existe nenhum número que seja meio proporcional entre eles. Este teorema é a Prop. 3 da *Secção Canónica* de Euclides, e Boécio preservou uma prova de Arquitas que é substancial idêntica à de Euclides. Esta prova será dada posteriormente (pp. ). Tanto quanto respeita a este capítulo, a importância da proposição reside no facto de que implica a existência, pelo menos tão cedo quanto Arquitas (430-365 B.C.), de uns *Elementos de Aritmética* sob a forma que designamos como Euclidiana, e sem dúvida um tipo de manual existente mesmo antes de Arquitas, que provavelmente Arquitas e outros depois dele melhoraram e desenvolveram.

## O 'irracional'

Mencionámos acima um dito de Proclus (se a leitura de ἄλογον é correcta) que Pitágoras descobriu a teoria ou estudo dos *irracionais*. Este assunto foi encarado pelos gregos como pertencendo mais à geometria que à aritmética. Os irracionais são tratados no Livro X de Euclides com linhas rectas ou áreas e Proclus menciona como assunto especial em temas da geometria relacionados com (1) *posições* (pois os números não têm posição), (2) *contactos* (pois a tangente está entre coisas contínuas), e (3) como linhas rectas irracionais (pois onde existe uma divisão *ad infinitum*, está também o irracional). Vou pois reportar no capítulo V, sobre a geometria Pitagórica, a questão da data da descoberta da teoria dos irracionais. Mas é certo que a incomensurabilidade da diagonal do quadrado pelo seu lado, isto é, a irracionalidade de $\sqrt{2}$ , foi descoberta na escola de Pitágoras, e é mais apropriado tratar aqui este caso em particular, porque a prova tradicional do facto depende da teoria elementar dos números, e porque os Pitagorianos inventaram um método de obter uma série infinita de razões aritméticas cada vez mais próximas do valor de $\sqrt{2}$ .

O método actual que permitiu aos Pitagorianos provar a incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ tomando 1 como unidade, foi sem dúvida o indicado por Aristóteles, uma *reductio ad absurdum* mostrando que, se a diagonal de um quadrado é incomensurável com o lado, segue-se que o mesmo número é simultaneamente par e ímpar. Esta é, evidentemente, a prova interpolada no texto de Euclides como X. 117, que é em substância a seguinte:

Suponhamos a diagonal $AC$ de um quadrado, incomensurável com o seu lado $AB$; e seja $\alpha:\beta$ a razão entre a diagonal e o lado expressa o mais simplesmente possível. Então $\alpha > \beta$ sendo $\alpha$ necessariamente >1. Tem-se:

$$AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$$

e, então $$AC^2 = 2\,AB^2, \quad \alpha^2 = 2\,\beta^2$$

Donde $\alpha^{2}$, é portanto $\alpha$ é par.

Porém, a razão $\alpha : \beta$ está expressa nos termos mais simples, donde $\beta$ deve ser ímpar.

Seja $\alpha = 2\,\gamma$ ; portanto $4\gamma^2 = 2\beta^2$ ou $2\gamma^2 = \beta^2$ , pelo que $\beta$ é par.

Conclui-se que a diagonal $AC$ não pode ser comensurável com o lado $AC$-

## Equações Algébricas

($\alpha$) *Sucessivas aproximações de* $\sqrt{2}$ *a partir do lado e do diâmetro do quadrado*

O método Pitagoriano de encontrar qualquer das sucessivas aproximações do valor de $\sqrt{2}$ resume-se a encontrar todas as soluções integrais das equações indeterminadas

$$2x^2 - y^2 = \pm 1$$

sendo as soluções sucessivas pares daquilo que denominámos, respectivamente, os *números* do *lado* e do *diâmetro* (diagonal) do quadrado. A lei de formação destes números é explicada como segue por Teão de Esmirna. Sendo a unidade o começo de todas as coisas, deve, potencialmente, ser ambas as coisas, um lado e um diâmetro. Consequentemente começamos com duas unidades, sendo uma o primeiro lado , que designamos $a_1$, e a outra o primeiro *diâmetro*, que chamamos $d_1$.

Represente o par ($a_2$, $d_2$) o segundo lado e o segundo diâmetro, formados a partir do primeiro, e ($a_3$, $d_3$) formado a partir do segundo, como segue:

$$\begin{array}{ll} a_2 = a_1 + d_1, & d_2 = 2a_1 + d_1, \\ a_3 = a_2 + d_2, & d_3 = 2a_2 + d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n+1} = a_n + d_n, & d_{n+1} = 2a_n + d_n,. \end{array}$$

Posto que $a_1 = d_1 = 1$, segue-se que

$$\begin{array}{ll} a_2 = 1 + 1 = 2, & d_2 = 2.\ 1 + 1 = 3, \\ a_3 = 2 + 3 = 5, & d_3 = 2.2 + 3 = 7, \\ a_4 = 5 + 7 = 12, & d_4 = 2.5 + 7 = 17, \end{array}$$

e assim por diante.

Teão estabeleceu, com referência a estes números, a proposição geral

$$dn^2 = 2a_n^2 \pm 1.$$

e observou que (1) os sinais alternam à medida que são tomados os sucessivos $d$'s e $a$'s, sendo $d_1^2 = 2a_1^2$ igual a $-1$, $d_2^2 = 2a_2^2$ igual a $+1$, $d_3^2 = 2a_3^2$ igual a $-1$, e assim por diante, enquanto (2) a soma dos quadrados de todos os $a$'s. [Se o número dos sucessivos termos em cada série é finito, é certamente necessário que o número seja par.]

Na verdade, as propriedades indicadas dependem da seguinte identidade:

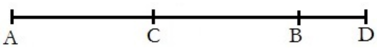
$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

pois, se $x$, $y$ são números que satisfazem uma das duas equações

$$2x^2 + y^2 = \pm 1,$$

a fórmula (se verdadeira) dá-nos dois números mais elevados, $x + y$ e $2x + y$, que satisfazem qualquer das duas equações.

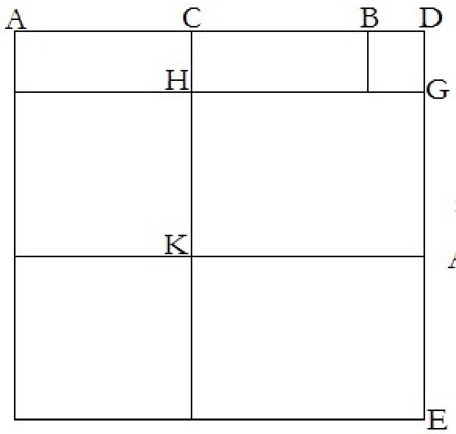
Esta identidade não é só verdadeira, sabemos como foi provada por Proclus.




Observando que 'foi provada graficamente por Euclides no SEGUNDO LIVRO dos ELEMENTOS ao qual Proclus adicionou o enunciado de Eucl. II. 10. Esta proposição prova que, se $AB$ é bissectado em $C$ e prolongado até $D$, então

$$AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2\ CD^2$$

Nota do Tradutor. O enunciado da proposição 10, de acordo com a expressão assinalada no rectângulo, não corresponde exactamente à tradução de Sir Thomas Heath na p. 395 dos ELEMENTOS.




$$AC = HK, \quad BD = DG, \quad GE = 2\,HK$$

$$AC \times CH = CB \times CH \quad (1)$$

$$AD^2 = 2AC^2 + CD^2 + AC \times CH + HG \times HK$$

mas

$$AC \times CH + HG \times HK = CB \times CH + CD \times HK = CD^2 - BD^2$$

ou $\boxed{AD^2 = 2\,AC^2 + 2CD^2 - BD^2}$

Proposição 10: Se sobre uma recta marcarmos um segmento AB, cortado ao meio em C e acrescentarmos BD, o quadrado do total é igual ao dobro do quadrado da metade AC, acrescido do dobro do quadrado do segmento CD e diminuído do quadrado do acréscimo BD.
( Euclides, *The thirteen book of the elements*, p. 395-7, Dover Science Books, USA.)

---

e se $AC=CB=x$ e $BD = y$, obtém-se

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + (x + y)^2$$

ou
$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2$$

que é a fórmula requerida.

Podemos, certamente, provar do mesmo modo, a propriedade dos números que são consecutivamente lado e diâmetro:

$$\begin{aligned} d_n^2 - 2a_n^2 &= (2a_{n-1} + 2d_{n-1}^2) - 2(a_{n-1} + 2d_{n-1})^2 \\ &= 2a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2 \\ &= -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2) \\ &= +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2) \end{aligned}$$

e assim por diante.

Numa passagem famosa da *República* (546 C) ao tratar do número geométrico, Platão distingue entre o 'diâmetro irracional de 5', i. e. a diagonal do quadrado que tem 5 por lado, ou $\sqrt{50}$, e aquilo a que chamou 'diâmetro racional' de 5. O quadrado do ‘diâmetro racional’ é inferior, em 1, ao quadrado do ‘diâmetro irracional’, e é portanto 49, pelo que o ‘diâmetro racional’ é 7; isto é, Platão refere-se ao facto de $2\times5^2 - 7^2 = 1$, e tem em mente o caso particular dos números 5 e 7 como lado- e diâmetro- que deve portanto ter sido conhecido antes do seu tempo. Como a prova da propriedade destes números é em geral encontrada, como diz Proclus, no teorema de Eucl. II. 10, isto é uma clara inferência de que o teorema é Pitagoriano, e foi provavelmente inventado com este especial propósito.(Eucl. II. ELEMENTOS, p.399)

*($\beta$) A ἐπάνθημα (epantema ,flor, aparecimento) de Timaridas*

Timaridas de Paros, um antigo Pitagoriano, foi o autor de uma regra para resolver um conjunto de equações simples ligando *n* quantidades desconhecidas. A regra foi, evidentemente, bem conhecida, pois foi chamada pelo nome especial de epantema, ou ‘flor’ de Timaridas. (O termo epantema não é, contudo, confinado à proposição agora em questão; Na *Introdução Aritmética* Jâmblico fala de ‘epantemata’, ‘aritmética epantemata’ e ‘epantemata de números particulares’). A regra é apresentada em termos gerais e não nos símbolos que então foram usados, mas o seu conteúdo é pura álgebra. As quantidades conhecidas ou determinadas distinguem-se das indeterminadas ou desconhecidas, sendo utilizados para as últimas os termos usados por Diofanto ‘um número indefinido ou indeterminado de unidades’ é descrito pela quantidade desconhecida ($x$). Se temos $n$ equações ligadas por $n$ quantidades desconhecidas $x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, nomeadamente,

$$\begin{gathered} x + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = s, \\ x + x_1 = a_1 \\ x + x_2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x + x_{n-1} = a_{n-1} \end{gathered}$$

a solução é dada por

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1})^{-s}}{n-2}$$

Jâmblico, de quem colhemos este assunto, mostra que outros tipos de equações podem ser reduzidas a este, de modo que esta regra não nos deixa embaraçados nos casos seguintes. Dá como exemplo, o problema indeterminado representado pelas três equações lineares entre quatro quantidades desconhecidas:

$$\begin{gathered} x+y = a\,(z+u) \\ x+z = b\,(u+y) \\ x+u = c\,(y+z) \end{gathered}$$

Destas equações obtemos:

$$x+y+z+u = (a+1)\,(z+u) = (b+1)\,(u+y) = (c+1)\,(y+z)$$

Se agora $x, y, z, u$ forem todos inteiros, $x+y+z+u$ deve conter $a$+1, $b$+1, $z$+1 como factores .Se $L$ for o mínimo múltiplo comum de $a$+1, $b$+1, $z$+1 , podemos escrever $x+y+z+u=L$, e obtemos das equações acima

$$x+y=\frac{a}{a+1}L,$$
$$x+z=\frac{b}{b+1}L,$$
$$x+u=\frac{c}{c+1}L,$$

donde $$x+y+z+u=L.$$

Estas equações são do tipo a que se aplica a regra de Timaridas, e, sendo o número de quantidades desconhecidas (e de equações) igual a 4, $n-2=2$ e

$$x=\frac{L\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\right)-L}{2}$$

O numerador da fracção é inteiro, mas pode ser ímpar e, neste caso, para que $x$ possa ser inteiro deve tomar-se $2L$ em vez de $L$ como valor de $x+y+z+u$. Jâmblico refere o caso particular em que $a=2$, $b=3$, $c=4$. $L$ é então 3.4.5 = 60, e o numerador da expressão de $x$ é 133-60, ou 73, um número ímpar; ele deve então tomar $2L$ ou 120 em lugar de $L$, e obtém-se $x$=73, $y$=7, $z$=17, $u$=23.

Jâmblico aplicou este método às equações

$$x+y=\frac{3}{2}(z+u)$$
$$x+z=\frac{4}{3}(u+y)$$
$$x+u=\frac{4}{5}(y+z)$$

o que dá $$x+y+z+u=\frac{5}{2}(z+u)=\frac{7}{3}(u+y)=\frac{9}{4}(y+z).$$

Portanto,

$$x+y+z+u=\frac{5}{3}(x+y)=\frac{7}{4}(x+z)=\frac{9}{5}(x+u)$$

Neste caso tomamos $L$ como mínimo múltiplo comum de 5, 7, 9, ou 315, e pomos

$$x + y+z + u = L =315$$

$$x+y=\frac{3}{5}L=189$$

$$x+z=\frac{4}{7}L=180$$

$$x+u=\frac{5}{9}L=175$$

donde
$$x=\frac{544-315}{2}=\frac{229}{2}$$

Atendendo a que $x$ deve ser inteiro, temos de tomar $2L$ ou 630 em vez de $L$, ou 315, e a solução é $x = 229$, $y = 149$, $z = 131$, $u = 121$.

($\gamma$) *Área de rectângulos em relação ao perímetro*

Slusa, nas cartas a Huygens datadas de 4 de Outubro de 1657 e 25 de Outubro de 1658 alude à propriedade dos números 16 e 18 que tinha lido algures em Plutarco que eram conhecidas dos Pitagorianos, nomeadamente que cada um destes números representa o perímetro bem como a área de um rectângulo; de facto, 4.4=2.4+2.4 e 3.6= 2.3 +2.6. Não encontrei a passagem de Plutarco, mas a propriedade do número 16 é mencionada no livro *Theologumena Arithmetices* onde se diz que 16 é a única área de um quadrado que é igual ao seu perímetro, pois, o perímetro dos mais pequenos quadrado é superior à sua área, e o perímetro dos maiores quadrados é inferior à sua área. Não sabemos onde os Pitagorianos provaram que 16 e 18 eram os únicos números com aquela propriedade; mas é bastante provável que o tenham feito, para encontrar a prova das soluções inteiras da equação $xy = 2(x+y)$. A resolução é fácil, pois a equação é equivalente a $(x-2)(y-2) = 4$, e temos apenas de equacionar $x-2$ e $y-2$ como factores correspondentes de 4. Posto que 4 só é divisível em factores inteiros de dois modos, 2×2 e 1×4, temos como soluções possíveis, para $x$ e $y$, (4, 4) ou (3, 6).

Tratados sistemáticos de Aritmética (teoria e números).

Será conveniente incluir neste capítulo alguns temas de aritmética dos últimos Pitagorianos, começando por Nicómaco. Se alguns tratados sistemáticos de aritmética foram escritos entre Euclides (Livros VII-IX) e Nicómaco, nenhum sobreviveu. Nicómaco de Gerasa, provavelmente de Gerasa na Judeia, a Este do rio Jordão, floresceu cerca de 100 A.D., pois, por um lado, num seu tratado *Enchiridion Harmonices* há uma alusão a Trasillo, que ordenou os diálogos Platónicos, escreveu sobre música e foi astrólogo-amigo de Tibério; por outro lado, a *Introductio Arithmetica* de Nicómaco foi traduzida para Latim por Apuleio de Madaura na Dinastia Antonina. Além da *Αριθμητὴ είσαιθγωγή* , diz-se que Nicómaco escreveu outro tratado sobre teologia ou as propriedades místicas dos números, chamada *Θεολογούμενα ἀριθμητικῆς*, em dois volumes. A curiosa miscelânea que nos chegou sob aquele título e que foi editada por Ast em 1817, é, contudo, certo que não foi escrita por Nicómaco; Anatólio, bispo de Niceia (A.D. 270), está entre os autores a quem fornece extractos; mas contém citações que parecem provir da obra autêntica. É possível que Nicómaco também escrevesse uma *Introdução à Geometria*, pois diz referindo-se a certos números sólidos, que eles têm sido especialmente tratados ‘na introdução geométrica, que é mais apropriada à teoria da grandeza’; mas este introdução geométrica pode não ser necessariamente uma obra sua.

Há uma grande distância de Euclides a Nicómaco. Na *Introductio Arithmetica* encontramos uma forma de exposição inteiramente distinta. Os números são representados em Euclides por linhas rectas com letras ligadas, um sistema que tem a vantagem de, como na notação algébrica, podermos trabalhar com números em geral sem a necessidade de lhes atribuir valores específicos; em Nicómaco os números não são mais denotados por linhas rectas, pelo que, quando é necessário distinguir diferentes números indeterminados isto é feito por circunlocução, o que torna as proposições difíceis de interpretar e árduas de seguir, é necessário após a leitura de cada proposição, ilustrá-la por meio de exemplos com números concretos. Além disso, foram eliminadas quaisquer demonstrações no próprio sentido da palavra; quando enuncia uma proposição geral, Nicómaco considera suficiente mostrar que ela seja verdadeira em casos particulares; algumas vezes deixa-nos a tarefa de inferir a proposição geral por indução a partir de casos particulares, que são os únicos apresentados. Por vezes faz uma nota absurda omitindo a distinção entre o caso geral e o caso particular, como quando , após ter definido a média que é ‘sub-contrário para o harmónico’ como sendo determinada pela relação $(a-b)/(b-c)=c/a$, onde $a > b > c$, e são dados 6, 5, 3 como uma ilustração, ele prossegue observando que é uma propriedade peculiar desta media que o produto do maior termo pelo médio é duplo do produto do médio pelo menor, simplesmente porque acontece ser verdadeiro no caso particular! Provavelmente Nicómaco, que não era na realidade um matemático, tencionava na sua *Introdução* publicar, não um tratado científico, mas um tratamento popular do assunto calculado para despertar no principiante o interesse na teoria dos números, familiarizado-o com os mais notáveis resultados até então obtidos; para provas de muitas desta proposições poderia referir Euclides e, sem dúvida, outros tratados agora perdidos. O estilo do livro confirma esta hipótese; é retórico e altamente exagerado; as propriedades dos números são apresentadas com uma aparência maravilhosa e mesmo miraculosa; as mais óbvias relações entre eles são apresentadas numa linguagem empolada e muito enfadonha de ler. É mais o aspecto místico que o lado matemático da teoria dos números que interessa Nicómaco. Se a verborreia é eliminada, o conteúdo matemático pode reduzir-se a um limitado âmbito. Pouco ou nada neste livro é original e, excepto certas definições e refinamentos de classificação, a sua essência recua aos primitivos Pitagorianos. O seu sucesso é difícil de explicar, excepto na hipótese de ter sido lido primeiro pelos filósofos do que pelos matemáticos (Papus evidentemente despreza-o), e mais tarde tornou-se geralmente popular numa época em que não havia matemáticos, mas apenas filósofos que incidentalmente se interessavam pela matemática. Além da tradução latina de Apuleio de Madaura (nascido cerca de A. D. 125) do qual não restam traços, existe a versão de Boécio (480 - 524 A.D.); e os comentadores, que incluem Jâmblico (séc. IV), Heronas, Asclépio de Tralles (séc. VI), Joannes Philopono e Proelus. O comentário de Jâmblico tem sido publicado, como também o de Philopono, ao passo que o de Asclépio diz-se ser existente em MSS [manuscritos]. Quando (o pseudo-) Luciano no *Philopatris* conta que Crítias diz para Triefono 'tu calculas como Nicómaco', temos uma indicação de que o livro era bem conhecido, embora a nota possa ser menos um cumprimento que um motejo das subtilezas Pitagóricas.

No Livro I, a Introdução, após um prelúdio filosófico consiste principalmente em definições e leis de formação. Os números pares e ímpares são tratados de início; em seguida trata da divisão dos pares em três espécies (1) pares da forma $2^n$, (2) pares-ímpares da forma $2(2n + 1)$, e (3) ímpares-pares da forma $2^{m+1}$ $(2n + 1)$, ocupando os últimos uma espécie de posição intermédia, partilhando o carácter dos outros dois. Os ímpares são em seguida divididos em três espécies: (1) 'primos e incompósitos', (2) 'secundários e compósitos', um produto de factores primos (excluindo 2, que é par mas não considerado como primo), e (3) 'aqueles que são em si mesmos secundários e compósitos mas que em relação a outros são primos e incompósitos', por exemplo 9 em relação a 25, que é ainda uma espécie de classe intermediária entre as duas outras; os defeitos desta classificação foram já indicados (p. 7). Estas diferentes classes de números ímpares foram exibidos numa descrição do crivo de Eratóstenes, dispositivo apropriadamente designado para encontrar números primos. O método é o seguinte: dispomos a série do números ímpares começando por 3.

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, \ldots\ldots$$

Agora, 3 é um número primo, mas os múltiplos de 3 não são; estes múltiplos são eliminados passando por dois de cada vez, começando por 3; do mesmo modo, 5 é um número primo, e passando por cima de quatro números de cada vez, começando por 5, nomeadamente 10, 15, 20, . . . , eliminamos todos esses múltiplos de 5. Em geral, se $n$ é um número primo, os seus múltiplos aparecem na série passando sobre $n-1$ de cada vez, começando por $n$; e eliminamos todos estes múltiplos. Claramente, contudo, de modo a tornar seguro que o número ímpar $2n + 1$ é primo, devemos ensaiar todos os divisores primos entre 3 e $\sqrt{2n+1}$; o que, como e′ obvio, torna este primitivo método empírico moroso e pouco prático para obter números primos de tamanho considerável.

O mesmo capitulo contém a regra para encontrar quando dois números são primos entre si; é o método de Eucl. VII. 1, equivalente à nossa regra para encontrar o máximo divisor comum, Mas Nicómaco expressa a regra em palavras, fazendo uso de linhas retas ou símbolos para representar os números. O processo permite saber se há um divisor comum maior que a unidade; se não há nenhum, isto é, se 1 é o único divisor, os números são primos entre si.

Os capítulos seguintes (cc. 14−16) são sobre números sobre-perfeitos (ὑπερτελὴς), deficientes (ἐλλιπὴς) e perfeitos (τελειος), respectivamente. As definições, a lei de formação de números perfeitos e as observações de Nicómaco foram dadas acima (p. 7-8).

Segue-se (cc. 17-23) a elaborada classificação das razões numéricas maiores que a unidade, com as suas contrapartes inferiores à unidade. Há cinco categorias de cada, e sob cada categoria há (*a*) o nome geral, (*b*) os nomes particulares que correspondem aos números particulares considerados.

A tediosa enumeração, para efeitos de referência, é dada na seguinte tabela [onde, sempre que possível, se omitiram os nomes gregos; o significado dos nomes latinos foram obtidos no LEXICON Latino-Português de Francisco Pedro Brou]:

| RAZÕES MAIORES QUE A UNIDADE | RAZÕES MENORES QUE A UNIDADE |
|---|---|
| 1. (a)Geral<br>múltiplos (multiplex)<br>(b) Particular<br>Duplos<br>Triplos<br>Etc.<br>2. (a) Geral<br>Superparticulares (que forma divisão) — um número que é da forma<br>$1+\frac{1}{n}$ $\frac{n+1}{n}$ ,<br>em que $n$ é qualquer número inteiro.<br><br>(b) Particular<br>De acordo com o valor de $n$ temos os nomes | 1. (a) Geral<br>Submúltiplo (submultiplex)<br>(b) particular<br>sub-duplos (que está contido duas vezes noutro)<br>sub-triplos (contido três vezes noutro)<br>Etc.<br>2. (a) Geral<br>Sub-super-particulares — um número contido noutro uma vez e uma fracção:<br>$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$,<br>em que $n$ é qualquer número inteiro.<br>(b) Particular<br>De acordo com o valor de $n$ temos os nomes |

sesquialter (número que contém outro uma vez e meia) $= 1\frac{1}{2}$
sesquitércios (número que contém três terços) $= 1\frac{1}{3}$
sesquiquartos (número que contém cinco quartos) $= 1\frac{1}{4}$
etc.

3. (a) Gerais

Superpartiens — que excede 1 por duas vezes, três vezes ou mais vezes um submúltiplo, e que, portanto, pode ser

$$1+\frac{m}{m+n} \textbf{ ou } \frac{2m+n}{m+n}$$

representado por

(b) Particulares

A formação de nomes para as séries de *superpartiens* particulares seguem três planos diferentes. Assim, os números da forma

$$1+\frac{m}{m+1}$$

$$1\frac{2}{3}\begin{cases}\text{superbipartiens (que contem um numero e mais duas}\\ \text{das suas partes (como 5 em relaçao a 3)}\\ \text{ou}\\ \text{superbitercius}\end{cases}$$

$$1\frac{3}{4}\begin{cases}\text{supertripartiens (que contem um numero e tres}\\ \text{das suas partes, como 7 em relaçao a 4)}\\ \text{ou}\\ \text{supertriquartus}\end{cases}$$

$$1\frac{4}{5}\begin{cases}\text{superquadripartiens– que contem um numero e quatro}\\ \text{das suas partes (como 9 em relaçao a 5)}\\ \text{ou}\\ \text{superquadriquintus}\end{cases}$$

subsesquialter (que está contido noutro uma vez e meia) $= \frac{2}{3}$
subsesquitércios (que está contido noutro uma vez e um terço) $= \frac{3}{4}$
subsesquiquartos (que está contido noutro uma vez e um quarto) $= \frac{4}{5}$
etc.

3. (a) Geral

Subsuperpartiens (número contido noutro uma vez e uma fracção)-que é da forma

$$\frac{m+n}{2m+n}$$

O nomes correspondentes não são especificados em Nicómaco.

---

N do T: elidimos nas chavetas os nomes gregos. A caixa de ferramentas da aplicação "equações" não suporta a introdução de acentos.
"superbipartiens - que contém um número e mais duas das suas partes (como 5 em relação a 3)

$$5 = 3 + 1 + 1$$

supertripartiens - que contém um número e três das suas partes (como 7 em relação a 4)

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

superquadripartiens - que contém um número e quatro das suas partes (como 9 em relação a 5)"

$$9 = 5 + 1 + 1 + 1 + 1$$

---

| RAZÕES MAIORES QUE A UNIDADE | RAZÕES MENORES QUE A UNIDADE |
|---|---|
| Onde a forma mais geral $1+n/(m+n)$, em vez de $1+m/(m+1)$ deve ser expressa. Nicómaco usa os termos segundo o plano de formação acima, por exemplo:<br>$1\frac{3}{5}=$ supertriquintus<br>$1\frac{4}{7}=$ superquadriseptimus<br>$1\frac{5}{9}=$ superquinquenonus<br>e assim por diante, embora ele possa ter usado o segundo e chamado esses rácios supertriquintus, etc. | |
| 4. (a) Geral<br>(multiplex superparticularis)<br>Este contém um certo *múltiplo* mais um certo submúltiplo (em vez de 1 mais um submúltiplo) e é portanto da forma $m+\frac{1}{n}$ (em vez de $1+1/n$, o excesso — *ἐπιμόριος*) ou $(mn+1)/n$ | 4. (a) Geral<br><br>submultiplex particularis, da forma $\frac{n}{mn+1}$. |
| (b) Particular<br>$2\frac{1}{2}=$ duplex sesquialter<br>$2\frac{1}{3}=$ duplex sesquitertius<br>$3\frac{1}{5}=$ triplex sesquiquintus | Os correspondentes nomes particulares não parecem ocorrer em Nicómaco, mas Boécio apresenta-os, e.g. subduplex sesquialter, subduplex sesquiquartus.<br>*Sesquialter* -contém o outro número uma vez e meia, um e meio<br>*Sesquitertius*- que contém três terços<br>*Sesquiquintus*- que contém cinco quintos |
| 5. (a) Geral<br>Multiplex superpartiens.<br>Este está relacionado com *ἐπιμόριος* (8, acima) do mesmo modo como “muitas vezes está para poucos”<br>$p+\frac{m}{m+n}$ ou $\frac{(p+1)m+n}{m+n}$ | 5.(a) Geral<br>*submultiplex superpartiens* — contém uma fracção da forma<br>$\frac{m+n}{(p+1)m+n}$ |

| RAZÕES MAIORES QUE A UNIDADE | RAZÕES MENORES QUE A UNIDADE |
|---|---|
| (b) Particular<br>Estes nomes somente são dados para os casos em que $n$ = 1; eles seguem a primeira forma dos nomes para particulares *ἐπιμερεῖς*,<br>e.g.<br>$2\frac{2}{3}$ = duplex superbipartiens<br><br>etc. | Os nomes correspondentes não se encontram em Nicómaco; mas Boécio tem *subduplex* (que está contido duas vezes em ...) e *superbipartiens* (que contém um número e mais duas das suas partes, como 5 em relação a 3) |

No c. 23 Nicómaco mostra como estas várias razões podem ser obtidas por meio de uma certa regra. Suponha-se que

$$a, b, c$$

são três números tais que a:b=b:c= uma das razões descritas; formamos assim os três números

$$a, \quad a+b, \quad a+2b+c$$

e também os três números

$$c, \quad c+b, \quad c+2b+a$$

Podem dar-se duas ilustrações. Se $a = b = c = 1$, a aplicação repetida da primeira fórmula dá (1, 2, 4), donde (1, 3, 9), (1, 4, 16), e assim por diante, mostrando os sucessivos múltiplos. Aplicando a segunda fórmula a (1, 2, 4), obtemos (4, 6, 9) cuja razão é $\frac{3}{2}$ ; similarmente, de (1, 3, 9) obtemos (9, 12, 16) onde a razão $\frac{4}{3}$ , etc.; isto é, de *πολλαπλάσιοι* (múltiplo) obtemos *ἐπιμόριος* (o excesso). De novo (9, 6, 4), onde a razão é da última espécie, obtemos a primeira fórmula (9, 15, 25), sendo a razão $1\frac{2}{3}$ , um excesso (*ἐπιμεής*), e pela segunda fórmula (4, 10, 25), dando a razão $2\frac{1}{2}$ , um *πολλαπλάσιἐπιμοριος* (múltiplas formas), etc.

O Livro II começa com dois capítulos que mostram como, por um processo converso, três termos em progressão contínua, com qualquer das formas anteriores como razão comum, podem ser reduzidas a três termos iguais. Se

$$a, b, c$$

forem os termos originais, sendo $a$ o mais pequeno, tomemos três termos da forma

$$c, \quad b-a, \quad \{c-a-2(b-a)\} = c+a-2b,$$

e apliquemos a mesma regra a estes três, e assim por diante.

Nos cc. 3-4 assinalou-se que, se

$$1, r, r^2, \dots r^n \dots$$

é uma progressão geométrica, e se

$$\rho_n = \rho^{n\text{-}1} + \rho^n,$$

então

$$\frac{\rho_n}{r^n} = \frac{r+1}{r}$$ , é uma razão por excesso ( *ἐπιμόριος*)

e similarmente, se

$$\rho'_n = \rho^{n\text{-}1} + \rho^n,$$

então

$$\frac{\rho_n}{r^n} = \frac{r+1}{r}, \quad \text{etc.}$$

Se registarmos em colunas os números formados deste modo, obteremos

$$\begin{array}{lllll}
1, & r, & r, & r^3 & r^n \\
 & r+1 & r^2 + r, & r^3 + r^2 \ldots & r^n + r^{n-1} \\
 & & r^3 + 2\,r^2 + 1, & r^3 + 2\,r^2 + r \ldots & r^n + 2\,r^{n-1} + r^{n-2} \\
 & & & r^3 + 3\,r^2 + 3r + 1 \ldots & r^n + 3\,r^{n-1} + 3r^{n-2} + r^{n-3} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & r^n + n\,r^{n-1} + n(n\text{-}1)/2\,r^{n-2} + \ldots + 1,
\end{array}$$

as colunas verticais são sucessivamente números de razão r/(r+1), enquanto diagonalmente temos a série geométrica 1, r+1, $(r+1)^2$, $(r+1)^3$...

## Teoria dos números poligonais

É prefaciado por uma explicação o caminho quase geométrico da representação dos números por pontos ou letras. Qualquer número, de 2 em diante, pode ser representado como uma *linha*; os números *planos* começam em 3, que é o primeiro número que pode ser representado sob a forma de um *triângulo*; após os triângulos seguem-se quadrados pentágonos etc. Os triângulos surgem por adição de qualquer número dos sucessivos termos começando por 1, da série dos números naturais.

$$1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

Os *gnómones* de triângulos são, portanto, os sucessivos números naturais. Os quadrados são obtidos por adição de qualquer número dos sucessivos termos da série dos números ímpares começando por 1, ou

$$1, 3, 5, \ldots 2n-1, \ldots .$$

Os gnómones de quadrados são os sucessivos números ímpares. Similarmente os gnómones dos números poligonais são números que formam uma progressão aritmética de razão 3, ou

$$1, 4, 7, ...1+(n-1)\times 3, ...$$

Geralmente, os gnómones de números poligonais de $a$ lados são

$$1,\ 1+(a-2),\ \ 1+2(a-2), ...1+(r-1)\ (a-2), ...$$

O número $a-$gonal de lado $n$ é

$$1 + 1+(a-2) + 1+2(a-2) + ... + 1 + (n-1)\ (a-2) = n + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1)\ (a-2)$$

A fórmula geral não é dada por Nicómaco, que se contenta em escrever alguns números poligonais de cada espécie até aos heptágonos.

Após mencionar que qualquer quadrado é a soma de dois sucessivos números triangulares, i.e.

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\ (n-1)n + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1),$$

e que um número $a-$gonal de lado $n$ é a soma de um número $(a - 1)$-gonal mais um número triangular de lado $n-1$, i.e.

$$n + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1)\ (a-2) = \ n + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1)\ (a-3) + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1),$$

ele passa ao primeiro número sólido, a pirâmide. A base da pirâmide pode ser um triângulo, um quadrado ou qualquer número poligonal. Se a base tem $n$ lados, a pirâmide é formada por polígonos similares e similarmente situados sucessivamente sobre ela, cada um dos quais tem menos 1 no seu lado do que aquele que o precede; termina naturalmente em uma unidade no topo, sendo a unidade 'potencialmente' um número poligonal. Nicómaco menciona as primeiras pirâmides triangulares como sendo 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, e explica a formação da série de pirâmides de bases quadradas, mas não dá a fórmula geral ou soma. Sendo um número $a$-gonal com $n$ lados

$$n + \tfrac{1}{2}\, n\ (n-1)\ (a-2)$$

segue-se que a pirâmide com aquele número poligonal por base é

$$1 + 2 + 3 + ... + n + \tfrac{1}{2}\ (a-2)\{1.2+2.3+ ... + (n-1)n\} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{a-2}{2}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Uma pirâmide diz-se truncada quando a unidade é cortada no topo, truncada duas vezes quando a unidade e a próxima camada é cortada de novo, e triplamente truncada quando se cortam três camadas, e assim por diante.

Outros números sólidos são então classificados como *cubos* se são o produto de três números iguais; números *escalenos* quando são o produto de três números todos desiguais, e são alternadamente chamados cunhas (*σφηνίσκοι*), estacas

($\sigma\varphi\eta\kappa\acute{\iota}\sigma\kappa o\iota$) ou pregos ($\beta\omega\mu\acute{\iota}\sigma\kappa o\iota$). Estes últimos três nomes são inapropriados para os meros produtos de três distintos factores, pois a figura que pode ser propriamente designada por estes nomes seria 'tronco de cone' ou 'tronco de pirâmide', isto é, teria no topo uma face plana menor que a da base. ( ... ) Jâmblico também indica a verdadeira natureza dos pregos ($\beta\omega\mu\acute{\iota}\sigma\kappa o\iota$) e das estacas ($\sigma\varphi\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\iota$) quando diz que têm não só as suas dimensões mas também as suas faces e ângulos desiguais, e que, enquanto os tijolos ($\pi\lambda\iota\nu\theta\iota\varsigma$) ou as vigas ($\delta o\kappa\acute{\iota}\varsigma$) correspondem ao paralelogramo, as cunhas ($\sigma\varphi\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\iota$) correspondem ao trapézio. Portanto, o uso destes termos como alternativas a *escaleno* parece ser devida a uma incompreensão. Outras variedades de números sólidos são os *paralelepípedos,* em que há faces oblongas (ἑτερομήκεις) da forma $n$ ($n$+1), pelo que os dois factores diferem de uma unidade; Segundo Jâmblico, os *feixes* (δοκίδες) ou colunas (στηλίδες), são da forma $n^2$ $(m+n)$ e as telhas da forma $m^2(m-n)$. Nos cubos, se o último dígito (as unidades) é igual ao último dígito do lado, dizem-se *esféricos* ou *recorrentes* ($\alpha\pi o\kappa\alpha\tau\alpha\sigma\tau\alpha\tau\iota\kappa o\acute{\iota}$); se os lados e as terminações dos cubos são em 1, 5, ou 6, e as terminações dos quadrados são nos mesmos dígitos, os quadrados dizem-se *circulares*.

Os números *oblongos* são, como vimos, da forma $m(m + 1)$; e os números *prolatos* são da forma $m^2(m+ n)$ onde $n > 1$.Nicómaco fornece algumas relações simples entre números oblongos, quadrados e triangulares. Se $h_n$ representa o número oblongo $n(n + 1)$, e $t_n$ o número triangular $n(n+1)/2$ de lado $n$ temos, por exemplo,

$$h_n/n^2 = (n+1)/n,\ \ h_n-n^2 = n,\ \ n^2/h_{n-1} = n/(\mathrm{n}-1)$$
$$n^2/h_n = \ h_n/(n+1)^2,\ \ n^2+(n+1)^2+2h_n = (2n+1)^2,$$
$$h= h_{n-1} =n^2 \pm n$$

sendo qualquer das fórmulas facilmente verificada.

*Soma das séries de números cúbicos*

A partir da série dos números ímpares, diz Nicómaco,

1, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 17, 19, ...

o primeiro (1) é um cubo, a soma dos dois seguintes (3 + 5) é um cubo, a soma dos três imediatos (7 + 9 + 11) é um cubo, e assim por diante. Podemos provar esta lei assumindo que $n^3$ é igual à soma de $n$ números ímpares começando com $2x + 1$ e terminando com $2x + 2n - 1$. A soma é $(2x +n)n$; donde, portanto, $(2x +n)n = n^3$, e

$$x = \tfrac{1}{2}(n^2 - n)$$

e a fórmula é

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n +3) + ... +(n^2 + n - 1) = n^3$$

Pondo sucessivamente $n$ = 1, 2, 3, ... $r$, nesta fórmula e adicionando os resultados encontramos que

$$1^3 + 2^3+ 3^3 + ... r^3 = 1 + (3 + 5) +(7 + 9 + 11)+ ... + ... + (r^2 + r - 1)$$

O número de termos nestas séries de números ímpares é claramente

$$1 + 2 + 3 + ... + r \text{ ou } \tfrac{1}{2} r (r - 1).$$

Portanto,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... r^3 = \tfrac{1}{4}\ r (r + 1) (1 + r^2 + r - 1) = \{\tfrac{1}{2} r (r+1)\}^2.$$

Nicómaco não deu esta fórmula, mas foi conhecida dos agrimensores romanos, e seria estranho que Nicómaco não a conhecesse. Pode ter sido descoberta pelo mesmo matemático que encontrou a proposição actualmente estabelecida por Nicómaco, que provavelmente foi conhecida desde tempos muito recuados. Os gregos foram desde os primitivos Pitagóricos acostumados a somar as séries de números ímpares colocando 3, 5, 7, etc., sucessivamente, como gnómones em torno de 1, pois sabiam que o resultado, qualquer que fosse o número de gnómones, era sempre um quadrado, e que, se número de gnómones adicionado de 1 é, digamos, $r$, tinha por soma, incluindo o 1, $(r+1)^2$. Então, uma vez descoberto que o primeiro cubo após 1, isto é, $2^3$, é 3 + 5 [acrescido do 1], o segundo, ou $3^3$, é 7 + 9 + 11, o terceiro ou $4^3$ é 13 + 15 + 17 + 19, e assim por diante, encontravam-se em posição para saber somar as séries $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... r^3$ pois era apenas necessário descobrir quantos termos da série 1 + 3 + 5 ... esta soma de cubos incluía. Sendo o número de termos claramente $1 + 2 + 3 + ... + r$, o número de gnómones (incluindo 1) é $\tfrac{1}{2}r (r+1)$; donde a soma de todos eles, (incluindo o 1) que é igual a

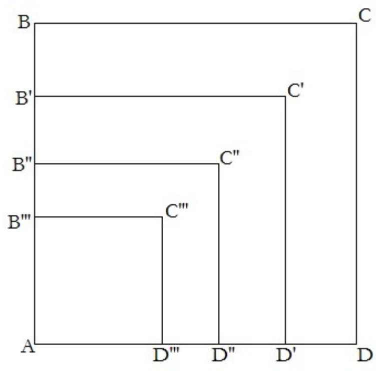
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... r^3$$

é $\{\tfrac{1}{2}r (r+1)\}^2$. Afortunadamente possuímos uma prova que torna altamente provável que os gregos realmente lidassem com o problema desta maneira. Alkarkhı, o algebrista árabe do século X-XI, escreveu uma álgebra com o título *Al-Fakhri*. Parece que havia ao tempo duas escolas na Arábia que se opuseram; uma a favor dos métodos Gregos, e outra dos métodos indianos. Alkarkhı foi um dos que seguiu o modelo Grego quase exclusivamente, e tinha uma prova dos teoremas agora em discussão por meio de uma figura com gnómones, fornecendo um excelente exemplo da álgebra geométrica que é caracteristicamente grega.

Seja $AB$ o lado do quadrado $AC$ (p. 38); seja

$$AB = 1 + 2 + ... + n = \tfrac{1}{2}n (n+1),$$

e suponhamos $BB' = n$, $B''B' = n - 1$, $B''B''' = n - 2$, e assim por diante. Desenhem-se os quadrados em $AB'$, $AB''$... formando os gnómones mostrados na figura.




Então, o gnómon

$$BC'D = BB'.BC + DD'.\ C'D' = BB'(BC + C'D').$$

Agora $BC = ½\, n(n + 1)$,

$C'D' = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = ½\, n(n + 1)$, $\qquad BB' = n$;

donde (gnómon $BC'D) = n.n^2 = n^3$

Similarmente (gnómon $B'C''D') = (n-1)^3$, e assim por diante.

Portanto $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... n^3$ = soma dos gnómones à volta do pequeno quadrado em A que tem por lado 1 mais aquele pequeno quadrado; isto é,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... n^3 = \text{quadrado } AC = \{½n(n-1)\}^2$$

É fácil ver que o primeiro gnómon à volta do pequeno quadrado em A é $3 + 5 + =2^3$, o gnómon seguinte é $7 + 9 + 11 = 3^3$, e assim por diante.

A demonstração está assim ligada ao teorema enunciado por Nicómaco. São possíveis duas alternativas. Alkarkhı pode ter devisado a prova adequada ao modo grego, seguindo a sugestão suprida pelo teorema de Nicómaco. Ou pôde ter encontrado a prova completa nalgum tratado grego agora perdido e reproduziu-a. Qualquer que seja a alternativa, a verdade é que podemos duvidar, em absoluto, da origem grega da soma das séries de cubos.

Nicómaco passa à teoria das proporções aritméticas e às várias médias, a descrição das quais já foi dada anteriormente (p. 19). Há mais algumas proposições a ser mencionadas sob este tema. Se $a-b = b-c$, pelo que $a$, $b$, e $c$ estão em progressão aritmética, então

$$b^2-ac = (a-b)^2 = (b-c)^2,$$

um facto que, segundo Nicómaco, não era geralmente conhecido. Boécio menciona esta propriedade dizendo que, se tomarmos $a+d$, $a$, $a-d$ como três termos de uma progressão aritmética, podemos escrever $a^2=(a+d)(a-d) + d^2$. Esta é presumivelmente a origem da regra de Nicómaco citada por um Ocreatus (?O'Creat), autor de um tratado *Prologus in Helceph*, escrito no segundo ou terceiro século ('Helceph' ou

‘Helcep’ é evidentemente equivalente a *Algorismus*; pode talvez significar para o *Al-Kāfī* de Alkarkhī?). O objecto desta *regra* é encontrar o quadrado de um número que contenha um simples dígito. If $d = 10-a$, ou $a+d = 10$, a regra é representada pela fórmula

$$a^2 = 10(a-d) + d^2,$$

pelo que o cálculo de $a^2$ depende do valor de $d^2$ que é facilmente avaliado se $d < a$.

De novo, se $a, b, c$ são três termos em progressão geométrica decrescente, sendo $r$ a razão comum ($a/b$ ou $b/c$), então

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

e
$$(a-b) = (r-1)b,\ (b-c) = (r-1)c$$
$$(a-b)-(b-c) = (r-1)(b-c).$$

Segue-se que

$$b = a - b(r-1) = c + c(r-1).$$

Esta é a propriedade de três termos em progressão geométrica que corresponde à propriedade dos três termos $a, b, c$ em progressão harmónica

$$b = a - \frac{a}{n} = c + \frac{c}{n}$$

da qual derivamos

$$n = (a+c)/(a-c)$$

Se $a, b, c$ estão em ordem descendente, Nicómaco observa que $\frac{a}{b} <=> \frac{b}{c}$ conforme $a, b, c$ estão em progressão aritmética, geométrica ou harmónica.

O ‘teorema Platónico’ acerca do número possível de médias geométricas entre dois números quadrados e entre dois números cúbicos respectivamente já foi mencionado (p. 21), bem como a ‘proporção mais perfeita’ (p. 17).

TEÃO DE ESMIRNA foi o autor de um livro que se propunha ser um manual de temas matemáticos de modo que um estudante pudesse tornar-se capaz de compreender Platão. Uma completa notícia deste trabalho será dada mais tarde; agora daremos apenas o assunto concernente à parte aritmética. Isto diz respeito à parte elementar da teoria dos números, sobretudo as mesmas linhas que encontrámos em Nicómaco, embora menos sistematicamente. Podemos aqui passar sobre as coisas comuns a Teão e Nicómaco e confinarmo-nos ao que é peculiar no primeiro. Há dois aspectos importantes: um é a teoria dos números-lados e números-diâmetros inventados pelos Pitagorianos com a finalidade de encontrar as sucessivas soluções integrais das equações $2x^2 - y^2 = \pm 1$; como vimos nas pp. 22-24. A outra é a explicação do número limitado de formas apresentadas pelos números quadrados. Se

$m^2$ é um número quadrado, diz Teão, $m^2$ ou $m^2-1$ são divisíveis por 3, e, de novo, $m^2$ ou $m^2-1$ são divisíveis por 4: o que equivale a dizer que um número quadrado não pode ser de qualquer das seguintes formas, $3n+2$, $4n+2$, $4n+3$. E diz ainda que, para qualquer número quadrado $m^2$, é válida *uma* das seguintes alternativas:

(1) $\dfrac{m^2-1}{3}$, $\dfrac{m^2}{4}$ ambos inteiros (e.g. $m^2 = 4$)

(2) $\dfrac{m^2-1}{4}$, $\dfrac{m^2}{3}$ ambos inteiros (e.g. $m^2 = 9$)

(3) $\dfrac{m^2}{3}$, $\dfrac{m^2}{4}$ ambos inteiros (e.g. $m^2 = 36$)

(4) $\dfrac{m^2-1}{3}$, $\dfrac{m^2-1}{4}$ ambos inteiros (e.g. $m^2 = 25$)

Jâmblico relata os mesmos factos sob uma forma ligeiramente diferente. A justeza destes diferentes afirmações pode ver-se no seguinte: posto que qualquer número $m$ deve ter uma das seguintes formas

$$6k,\quad 6k \pm 1,\quad 6k \pm 2,\quad 6k \pm 3.$$

qualquer quadrado $m^2$ deve ter uma ou outra das formas

$$36\,k^2,\quad 36\,k^2 \pm 12k + 1,\quad 36\,k^2 \pm 24k + 4,\quad 36\,k^2 \pm 36k + 9.$$

Para os quadrados do primeiro tipo, $m^2/3$ e $m^2/4$, são ambos inteiros, para aqueles que são do segundo tipo $(m^2\text{-}1)/3$, $(m^2\text{-}1)/4$ são ambos inteiros, para os do terceiro tipo, $(m^2\text{-}1)/3$ e $m^2/4$ são ambos inteiros, e para os do quarto tipo $m^2/3$, $(m^2\text{-}1)/4$ , são ambos inteiros; o que está de acordo com a afirmação de Teão. Se as quatro formas de quadrados forem divididas por 3 ou 4, o resto é sempre 0 ou 1; pelo que, como diz Teão, nenhum quadrado pode ser da forma $3n + 2$, $4n + 2$ ou $4n + 3$. Pode seguramente duvidar-se terem sido estas descobertas dos Pitagorianos.

JÂMBLICO nasceu em Chalcis, na Coele-Síria, foi aluno de Anatolius e Porfírio, e pertenceu à primeira metade do séc. IV A.D. Escreveu nove livros sobre a Seita Pitagórica, com os seguintes títulos: I. Sobre a vida de Pitágoras; II *Exortação à Filosofia*; III *Sobre a ciência matemática em geral*; IV *Introdução à Aritmética de Nicómaco*; V *A ciência aritmética na Física*; VI *A ciência aritmética na Ética*; VII *A ciência aritmética na Teologia*; VIII *Sobre a Geometria Pitagórica*; IX *Sobre a música Pitagoriana*. Os primeiros quatro livros sobreviveram e são acessíveis em edições modernas; os outros cinco perderam-se, embora, sem dúvida, existam extractos do VII contidos nos *Theologumena arithmétices.* A *Introdução* de Nicómaco ao Livro IV é o que agora nos diz respeito; e as poucas coisas que requerem notícia são as seguintes. A primeira é a visão de um número quadrado como uma corrida formada por sucessivos números de 1 (como sinal de partida) até $n$, o lado do quadrado, que é o ponto de retorno, e então regressa de $(n-1)$, $(n-2)$, etc., até 1 ( o objectivo), ou:

$$1 + 2 + 3 + 4 \ldots (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1$$

Isto é certamente equivalente à afirmação de que $n^2$ é a soma de dois números triangulares $\frac{1}{2}\, n(n+1)$, e $\frac{1}{2}\, n(n-1)$ cujos lados são respectivamente $n$ e $n-1$. Similarmente, Jâmblico adianta que o número *oblongo*

$$n\,(n-1) = (1+2+3+\ldots+n) + (n-2+n-3+\ldots+3+2).$$

Observa igualmente que este princípio, que ele chama a *unidade da segunda corrida*, que os Pitagorianos encaram como $100 = 10\times10$, ou a unidade da terceira corrida, $1000 = 10^3$ como a unidade da quarta corrida, e assim por diante, posto que

$$1+2+3+\ldots+10+9+8++\ldots+2+1 = 10\times10,$$
$$10+20+30+\ldots+100+90+80+\ldots+20+10 = 10^3,$$
$$100+200+300+\ldots+1000+900+\ldots200+100 = 10^4\,,$$

e assim por diante. Jâmblico vê nisto a virtude especial do número 10; embora, certamente, a mesma fórmula tivesse lugar em qualquer base de numeração, tal como na decimal.

Em conexão com esta terminologia Pitagoriana decimal, Jâmblico adianta uma proposição do maior interesse. Suponham-se três números consecutivos quaisquer, sendo o maior divisível por 3. Tome-se a soma dos três números, que consistem num certo número de unidades, um certo número de dezenas, um certo número de centenas, e assim por diante. Agora pegue as unidades da dita soma, e adicione quantas unidades houver nas dezenas, quantas unidades houver centenas, e assim por diante, e adicione todas as unidades assim obtidas juntas (isto é, somem-se os dígitos da soma expressa em nossa notação decimal). Aplique o mesmo processo ao resultado e assim por diante. Então, diz Jâmblico, *o resultado final será o número* 6. Por exemplo, tome os números 10, 11, 12; a soma é 33. Adicione os dígitos, e o resultado é 6. Tome o número 994, 995, 996: a soma é 2985; a soma dos dígitos é 24; e a soma dos dígitos de 24 é 6. A verdade deste resultado é demonstrada deste modo:

Seja $$N = n_0 + 10\,n_1 + 10^2\,n_2 + \ldots$$

um número escrito em notação decimal, e represente $S(N)$ a soma dos seus dígitos, $S^{(2)}(N)$ a soma dos dígitos de $S(N)$, e assim por diante.

Agora, $$N - S(N) = 9(\,n_1 + 11\,n_2 + 111\,n_3 + \ldots),$$

donde $$N \equiv S(N) \pmod{9}.$$

Similarmente $$S(N) \equiv S^{(2)}(N) \pmod{9}.$$
$$\vdots$$

Seja $$S^{(k-1)}(N) \equiv S^{(k)}(N) \pmod{9}$$

a última das relações desta espécie; $S^{(k)}(N)$ será um número $N' \leq 9$.
Adicionando as congruências obtemos

$$N \equiv N' \pmod{9}, \text{ sendo } N' \leq 9.$$

Agora, dados três números consecutivos, o maior dos quais divisível por 3, podemos escrever para a sua soma

$$N = (3p + 1) + (3p + 2) + (3p + 3) = 9p + 6 ,$$

e da congruência acima resulta

$$9p + 6 \equiv N' \text{ (mod. 9)}$$

pelo que

$$N' \equiv 6 \text{(mod. 9)};$$

e, posto que $N' \leq 9$, $N'$ só pode ser igual a 6.

Esta adição de dígitos de um número expressa na nossa notação tem um importante paralelo na passagem da *Refutação das Heresias* de Santo Hipólito, onde se descreve um método de vaticinar futuros acontecimentos designado 'Cálculo Pitagoriano'. Aqueles, diz ele, que afirmam predizer acontecimentos por meio de cálculos com números, letras e nomes, usam o princípio do *(pythemenes)* *adivinho* ou *base,* isto é, que calculamos um dígito de um número expresso na nossa notação decimal; para os Gregos, no caso de qualquer número acima de 9, o *adivinho* era o mesmo número de unidades que o numeral alfabético contém de dezenas, centenas, milhares, etc. Então, o *adivinho* de 700 (ψ em grego) é 7 (ζ); o de ꞩ (6000) é ς (6), e assim por diante. Então, o método consiste em encontrar o *adivinho* de um certo nome, digamos '*Αγαμέμενων*' [N.T., Rei de Micenas : A - 1, *γ* -3, *α* - 1, *μ* - 4, *έ* - 5, *μ* - 4, *ε* -5, *ω* - 8, *ε* -5]. Tomando os *adivinhos* de todas as letras e adicionando-os, temos

$$1 + 3 + 1 + 4 + 5 + 4 + 5 + 8 + 5 = 36.$$

Tome-se o *adivinho* de 36, nomeadamente 3 e 6, cuja soma é 9. O *adivinho* de *Αγαμέμενων* é portanto 9. Tome-se a seguir o nome *Εκτωρ;* os *adivinhos* são 5, 2, 3, 8, 1, cuja soma é 19; os *adivinhos* de 19 são 1, 9; a soma de 1 e 9 é 10 cujo *adivinho* é 1. É fácil', diz Hipólito, encontrar os *adivinhos* das letras, obtemos no caso de *Εκτωρ,* 19, que é a sua soma. Divida-se este por 9 e anote-se o resto: então, se eu dividir 19 por 9 o resto é 1, pois 9 vezes 2 é 18 e resta 1, o qual em consequência é o *adivinho* de *Εκτωρ*. Tomemos ainda o nome *Πάτροκλος* [Pátroclo, o amigo de Aquiles]. A soma dos *adivinhos* é

$$8 + 1 + 3 + 1 + 7 + 2 + 3 + 7 + 2 = 34:$$

e 3 + 4 = 7, pelo que 7 é o *adivinho* de *Πάτροκλος.* 'Então, aqueles que efectuam o cálculo pela *regra dos nove* tomam um nono da soma dos *adivinhos* e determinam a soma dos *adivinhos* no resto. Por outro lado, aqueles que seguem a *regra dos sete* dividem por 7. Encontrou-se 34 para a soma dos *adivinhos* em *Πάτροκλος*. 34 dividido por 7, dá 4, e como 7 vezes 4 é 28, o resto é 6. ...' 'É necessário observar que, se a divisão dá um cociente inteiro (sem resto), ... o *adivinho* é o próprio número 9' (isto é, se a *regra dos 9* for seguida). E assim por diante.

Duas coisas emergem deste fragmento. (1) O uso do *adivinho* não apareceu pela primeira vez quando Apolónio moldou o seu sistema para expressar e multiplicar grandes números; originou-se muito mais cedo, com os Pitagóricos. (2) O método *adivinho* no cálculo apareceu da ‘extracção dos nove’, a prova que tem este nome , quando tomamos a soma dos dígitos de um número e dividimos por 9 para obter o resto. O método de verificação por ‘extracção dos 9’ chegou-nos por intermédio dos Árabes que, como Avicena e Máximo Planudes, tal como nós, o aprenderam dos Indianos; mas a anterior demonstração mostra que, para todos os efeitos, os elementos a partir dos quais ela se construiu nos chegou às mãos pela Aritmética Pitagórica.