Triângulos

Segue-se uma lista de ferramentas que podem ser úteis na resolução de alguns dos problemas no verso.

Teorema (Teorema de Herão). *Consideremos um triângulo de lados a, b, c, e denotemos por s o* semiperímetro $\frac{a+b+c}{2}$ *do triângulo. A área do triângulo é* $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Teorema (Lei dos Cossenos). *Num triângulo, sejam a, b e c os comprimentos dos seus lados e β o ângulo oposto ao lado de comprimento b. Temos $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.*

Teorema (Lei dos Senos). *Num triângulo, sejam a, b e c os comprimentos dos seus lados e α, β e γ os ângulos opostos aos lados de comprimento a, b e c, respetivamente. Temos*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

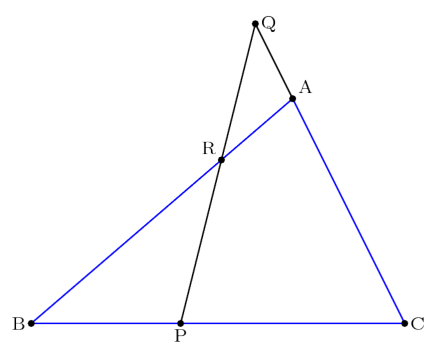
Mais precisamente, se R é o raio da circunferência circunscrita de $[ABC]$, então $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Teorema (Teorema da Bissectriz). *Seja $[ABC]$ um triângulo. Suponhamos que a bissectriz interna de $\angle BAC$ corta $[BC]$ no ponto L. Então temos*

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}.$$

Teorema (Teorema de Menelaus). *Se a reta PQ interseta o triângulo $\triangle ABC$ sem passar por nenhum dos seus vértices, com P no segmento $[BC]$, Q na reta AC, e com R na intersecção de PQ com o lado $[AB]$, então*

$$\frac{|PB|}{|CP|} \cdot \frac{|QC|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1$$



Nota: O recíproco do Teorema de Menelaus é válido:
considerando ainda o triângulo $[ABC]$, se na figura acima tivermos $\frac{|PB|}{|CP|} \cdot \frac{|QC|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1$, então R está na reta PQ.

Quem quiser saber ainda mais quando regressar a casa, pode por exemplo explorar os seguintes ponteiros:

- `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Menelaus'_theorem`
- `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Stewart's_theorem`
- `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Ceva's_theorem`

Justifiquem cuidadosamente as vossas respostas, ilustrando-as com figuras adequadas.

1. Um triângulo tem lados de comprimentos 20, 101 e 99. Determinem as suas alturas.

2. Um ponto E dentro de um quadrado $[ABCD]$ é tal que $|AE| = 5$, $|BE| = 2\sqrt{2}$ e $|CE| = 3$. Determinem a área de $[ABCD]$.

3. O héxagono $[ABCDEF]$ é tal que $|AB| = |BC| = |CD| = 1$ e $|DE| = |EF| = |FA| = 2$. Todos os vértices do hexágono estão na mesma circunferência. Determinem o raio dessa circunferência.

4. Num triângulo $[ABC]$, o ponto D é o ponto médio de $|BC|$. Suponham que $\angle BAD = 30°$ e $\angle DAC = 15°$. Determinem $\angle ABC$.

5. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A. O ponto D situa-se na reta AB, entre A e B, e é tal que $3\angle ACD = \angle ACB$ e $|BC| = 2|BD|$. Determinem a razão $\frac{|DB|}{|DA|}$.

6. Num triângulo $[ABC]$, temos $|AB| > |AC|$. A altura a partir de A intersecta a reta BC no ponto K. A mediatriz de $[BC]$ intersecta $[BC]$ no ponto D e intersecta $[AB]$ no ponto F, enquanto que a reta passando por F paralelamente a BC intersecta AC no ponto E. Provem que a reta DE passa pelo ponto médio de $[AK]$.

7. Na figura representada mais abaixo, o triângulo $[ABC]$ tem perímetro 28 e a circunferência inscrita é tangente aos seus lados em E, F e D. O ponto M é o ponto médio de $[BC]$ e AM intersecta a circunferência em L e em N de tal modo que $|AL| = |LN| = |NM|$. Determinem $|AB|$, $|AC|$ e $|BC|$.