Preparação olímpica na África do Sul em 2010

1. Resolvam os seguintes problemas do *Talent search* de 2010 para as Olimpíadas Sul-africanas.

   (a) Num certo tribunal, há quatro acusados, os quais chamamos de A, B, C e D para proteger a identidade das suas inocentes famílias. Os seguintes factos foram estabelecidos:

   - Se A é culpado, então B é um cúmplice.
   - Se B é culpado, então C é um cúmplice ou A é inocente.
   - Se D é inocente, então A é culpado e C é inocente.
   - Se D é culpado, então também o é A.

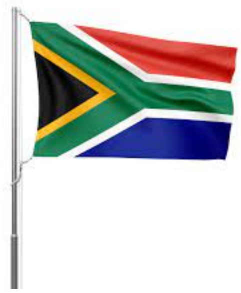
   Quem é inocente e quem é culpado?

   (b) Doze bolas diferentes devem ser arrumadas em quatro caixas diferentes, de tal modo que cada caixa contém três bolas. De quantas maneiras podemos fazer isso?

   (c) Provem que para todos os valores reais de a se tem $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$.

2. O triângulo $[DEF]$ satisfaz $|DE| = 13$, $|DF| = 15$, e a altura do lado EF tem comprimento 12. Determinem todos os possíveis comprimentos do lado EF.

3. Determinem todos os pares (p, n) tais que p é um primo e n é um inteiro positivo para os quais $p^2 + 7^n$ é um quadrado perfeito.



4. O Adriano ensina numa turma formada por seis pares de gémeos. Ele quer fazer uma competição por equipas, mas evitando que exista algum par de gémeos numa mesma equipa. Respeitando esta condição:

   (a) De quantas maneiras ele pode dividir a turma em duas equipas de seis?

   (b) De quantas maneiras ele pode dividir a turma em três equipas de quatro?

   Nota: Este problema já apareceu na jornada de 17 de Março de 2018.

5. No triângulo $[ABC]$, a bissectriz do ângulo ABC intersecta AC no ponto D. Suponham que o circuncentro do triângulo $[ABC]$ concide com o incentro do triângulo $[BCD]$. Determinem os ângulos do triângulo $[ABC]$.

6. Seja S o conjunto dos inteiros que podem ser escritos na forma $50m + 3n$ onde m e n são inteiros não negativos. Determinem a soma de todos os inteiros positivos que não estão em S.

7. Dado um conjunto de n inteiros positivos consecutivos, é possível dividir esse conjunto em dois subconjuntos disjuntos A e B tais que o produto dos elementos de A iguala o produto dos elementos de B se

   (a) $n = 10$?

   (b) $n = 2010$?