

2013

1. Na ilha da Lógica vivem apenas Cavaleiros e Peões. Os Cavaleiros dizem sempre a verdade, e os Peões mentem sempre. Um inquérito é feito junto dos 2013 habitantes da ilha. O inquérito tem três questões: “Apoias a equipa Azul?”, “Apoias a equipa Verde” e “Apoias a equipa Vermelha?”. Cada habitante apoia uma e uma só das três equipas. O número de respostas “Sim” ao inquérito foi 3000. Quantos Cavaleiros vivem na ilha?
2. Os números $1, 2, \dots, 2013$ são escritos no quadro de acordo com uma certa ordem, cada um dos quais exatamente uma vez. Entre cada dois números vizinhos, o módulo da sua diferença é escrito e os números originais são apagados. Isto é repetido até que sobre um só número. Qual é o maior número possível que pode sobrar?
3. O Benjamim, um estudante do terceiro ano, tentou calcular a soma $1 + 2 + 3 + \dots + 2012$, e esqueceu-se de algumas parcelas, obtendo um resultado incorrecto que é múltiplo de 2011. Já a sua colega Anabela tentou calcular a soma $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 2013$, mas também se enganou, ao esquecer-se precisamente das mesmas parcelas esquecidas pelo Benjamim, e desse modo ela obteve uma soma N múltipla de 2014. Qual é o valor da razão $\frac{N}{A}$?
4. Um torneio de ténis de mesa tem as regras a seguir descritas. Em cada ronda, se o número de concorrentes é ímpar, então um concorrente sorteado passa automaticamente para a ronda seguinte, e os restantes formam pares que jogam entre si, saindo de cada par um vencedor que passa à ronda seguinte. Seja $f(n)$ o número de rondas num torneio com n jogadores. Por exemplo, temos $f(5) = 3$. Determinem $f(2013)$ e determinem o mais pequeno inteiro n tal que $f(n) = f(2013)$.
5. Determinem todos os inteiros positivos que são exatamente 2013 vezes maior do que a soma dos seus algarismos.
6. Pode 2013 ser representado como a diferença de dois cubos de inteiros?
7. Determinem o mais pequeno número natural n para os quais existem inteiros a_1, \dots, a_n (não necessariamente diferentes) tais que $a_1^4 + \dots + a_n^4 = 2013$.