Problemas reciclados

1. Os vértices de um cubo são etiquetados com os números de 1 a 8, sendo cada número usado uma vez. Para cada aresta, calcula-se a soma dos números nas suas extremidades. É possível etiquetar os vértices do cubo de modo que as somas associadas às arestas sejam todas diferentes?

2. No triângulo $[ABC]$, o ponto P pertence ao lado $[AB]$, e tem-se $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{4}$. A perpendicular a AB que passa pelo ponto médio de $[PB]$ intersecta o lado $[BC]$ no ponto Q. Determinem $\overline{BC}$ sabendo que $\overline{AC} = 7$ e $A(PQC) = \frac{4}{25}A(ABC)$, onde $A(XYZ)$ denota a área do triângulo $[XYZ]$.

3. Em cada dia, o João corre a quilómetros ou b quilómetros, onde a e b são inteiros positivos tais que $a > b$. Se quiser, o João pode correr exatamente 100 quilómetros em 9 dias ou em 11 dias, mas não o pode fazer em 10 dias. Determinem os valores possíveis de a e b.

4. Determinem os inteiros n tais que $n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ é um múltiplo de 199.

5. Determinem todos os pares de inteiros positivos (x, y) que satisfazem a equação
$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

6. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero. Seja D o ponto médio de $[BC]$, e suponhamos que E é um ponto do segmento $[AC]$ e F é um ponto do segmento $[AB]$. A área de $[EDC]$ é $24\sqrt{3}$, a área de $[AFE]$ também é $24\sqrt{3}$, e a área de $[FBD]$ é $54\sqrt{3}$. Determinem os comprimento dos lados do triângulo $[ABC]$.

7. Determinem o maior valor possível de M para o qual se tem
$$\frac{x}{1+\frac{yz}{x}} + \frac{y}{1+\frac{zx}{y}} + \frac{z}{1+\frac{xy}{z}} \geq M$$
para quaisquer números reais positivos x, y, z tais que $xy + yz + zx = 1$.