Partições

Chegados a esta parte da Liga Delfos, vamos partir para a resolução de problemas originários de várias partes do mundo, partindo do princípio que à partida isso é interessante para todas as partes envolvidas, o que em boa parte é muito interessante.

Uma partição de um inteiro positivo n é uma maneira de representá-lo como soma de inteiros positivos. Duas partições são consideradas a mesma se apenas diferirem na ordem das parcelas. Por exemplo, existem cinco partições distintas do inteiro 4:

$$4, \qquad 3+1, \qquad 2+2, \qquad 2+1+1, \qquad 1+1+1+1.$$

Vamos denotar por $p(n)$ o número de partições de n.

1. Vamos aquecer?
   (a) Seja $k < n$. Mostra que o número de partições de n onde o número k aparece pelo menos uma vez é $p(n-k)$.
   (b) Mostra que na lista de todas as partições de n, o número 1 aparece $p(n-1)+p(n-2)+\cdots+p(1)+1$ vezes.
2. Seja $k < n$ e $f(n,k)$ o número de partições em que todas as parcelas são maiores ou iguais a k.
   (a) Mostra que $f(n+4,2)-f(n+2,2)-f(n+1,2) = p(n+4)-p(n+3)-p(n+2)+p(n)$.
   (b) Mostra que $f(n,k) = f(n,k+1)+f(n-k,k)$.
3. **(U.S.A. Mathematical Olympiad, 1986)** Dada uma partição π, seja $U(\pi)$ o número de 1's que ocorrem em π e $I(\pi)$ o número de inteiros distintos que ocorrem em π (por exemplo, se π for a partição $1+1+2+2+2+5$ de 13, então $U(\pi)=2$ e $I(\pi)=3$). Mostra que, fixado um inteiro positivo n, a soma de todos os $U(\pi)$ onde π é uma partição de n é igual à soma de todos os $I(\pi)$ onde π é uma partição de n.
4. **(China TST, 2018)** Determina todos os inteiros positivos n que satisfazem $p(n)+p(n+4) = p(n+2)+p(n+3)$.
5. **(XXIII Semana Olímpica da OBM)** Seja $a_0 > 1$ um inteiro. A Alice e o Bruno vão construir uma partição $a_1+\cdots+a_k$ de a_0 jogando o seguinte jogo: alternadamente, a Alice e o Bruno escolhem um inteiro positivo menor que a_0 de tal forma que, na i-ésima escolha, o inteiro a_i escolhido é tal que $a_i \leq a_{i-1}$ e $a_1+\cdots+a_i \leq a_0$. O jogo termina quando se tiver $a_1+\cdots+a_i = a_0$ e ganha o último jogador. Se a Alice for a primeira a jogar, determina, em função de a_0, quem tem a estratégia vencedora.

Quando falamos em partições, podemos também referir-nos a partições de conjuntos. Uma partição (finita) de um conjunto X é uma família $S_1, \ldots, S_p$ de subconjuntos de X, disjuntos dois a dois, e cuja união é X. Por exemplo, se X for o conjunto de alunos nesta sala então, a divisão de alunos por equipas da Liga Delfos origina uma partição de X.

6. **(IMO, 1970)** Quais os inteiros positivos n tais que o conjunto $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ admite uma partição em dois subconjuntos cujo produto dos elementos é o mesmo?

7. **(IMO, 1974)** Considera uma partição de um tabuleiro de xadrez, de dimensão 8×8, em p retângulos de tal forma que o número de casas brancas e de casas pretas no interior de cada retângulo é o mesmo. Seja a_i o número de casas brancas no i-ésimo retângulo, e supõe que $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$.

   (a) Determina o maior número p para o qual uma tal partição é possível.

   (b) Para o p calculado na alínea anterior, determina todas as possibilidades para a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_p$.