Sistemas de Numeração

Um sistema de numeração é um sistema que permite representar inteiros como combinações lineares da forma $a_k \cdot b_k + \cdots + a_1 \cdot b_1 + a_0 \cdot b_0$, onde os coeficientes $a_k, \ldots, a_0$ são normalmente chamados dígitos e os elementos $b_0, \ldots, b_k, \ldots$ são os elementos da base. Em geral, uma tal representação não é única. No nosso dia-a-dia, estamos habituados a representar os inteiros no chamado *sistema de numeração decimal*. Neste caso, os dígitos permitidos são os elementos do conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$ e os elementos da base são $10^0 < 10^1 < 10^2 < \ldots$. Assim, quando escrevemos, por exemplo, o número 287, estamo-nos a referir ao inteiro definido pela combinação linear

$$2 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0.$$

No mundo dos computadores, é também muito frequente considerarem-se inteiros representados na chamada *base binária*, isto é, na base que consiste em todas as potências inteiras de 2. Assim, o inteiro 287 pode também ser representado pela sequência $(100011111)_2$, significando isto que 287 é o resultado da combinação linear

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8.$$

Estes são apenas dois exemplos, mas os sistemas de numeração podem ser tão diversos quanto a tua imaginação permitir...

1. Considera o inteiro 5788.
   (a) Qual é a representação de 5788 na base 3?
   (b) E na base 532?
   (c) Consegues escrever este inteiro como uma combinação linear da forma

   $$a_k \times k! + \cdots + a_2 \times 2! + a_1 \times 1!,$$

   em que cada a_i pertence ao conjunto $\{0, 1, \ldots, i\}$ e $a_k \neq 0$? De quantas formas o consegues fazer?

   Quando um inteiro n admite uma representação como esta, podemos escrever $n = (a_k \ldots a_2 a_1)_!$ e dizemos que $(a_k \ldots a_2 a_1)_!$ é uma representação de n no *sistema de numeração fatorial*.

2. Considera um inteiro n representado no sistema de numeração fatorial, digamos $n = (a_k \ldots a_2 a_1)_!$.
   (a) Em função de k, qual é o valor mínimo que n pode tomar? E o máximo?
   (b) Existe algum inteiro n que admita duas representações distintas no sistema de numeração fatorial?
   (c) Quais são os inteiros que podem ser representados no sistema de numeração fatorial?

Não te esqueças de justificar todas as respostas!

3. Vamos agora rever, ou descobrir, alguns critérios de divisibilidade.

   (a) Seja $n = (a_k \ldots a_1 a_0)_{10}$ um inteiro representado na base 10. Mostra que n é divisível por 3 se e só se $a_k + \cdots + a_1 + a_0$ for divisível por 3. E se $n = (a_k \ldots a_1 a_0)_2$? Que critério de divisibilidade por 3 seria válido?

   (b) Seja $n = (\underbrace{2022\ldots2022}_{\text{2023 vezes}})_{10}$ (isto é, o inteiro que na base 10 é representado pela concatenação, 2023 vezes, da sequência 2022). Será que n é um quadrado perfeito? Porquê?

   (c) Seja $n = (a_k \ldots a_2 a_1)_!$. Exibe critérios simples de divisibilidade por 3 e por 6.

4. Encontra todos os inteiro n tais que $n = (abcd)_{10} = (dcba)_7$.

5. **(United Kingdom Mathematical Olympiad, 1999)**

   Dado um inteiro n, seja $S_3(n)$ a soma dos cubos dos dígitos da representação de n na base 3. Considera a sequência $u_1, u_2, \ldots$ definida por

   $$u_1 = n, \quad u_k = S_3(u_{k-1}), \text{ para } k \geq 2.$$

   Mostra que um dos inteiros $1, 2, 17$ aparece na sequência.

6. **(International Mathematical Olympiad, 1994)**

   Considera a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que, a cada n, associa o número de elementos do conjunto $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ cuja representação na base 2 tem exatamente três dígitos 1.

   (a) Mostra que f é sobrejetiva.

   (b) Determina todos os inteiros positivos a para os quais existe exatamente um inteiro n que satisfaz $f(n) = a$.

7. **(Slovenian Mathematical Olympiad, 1999)**

   Imagina que tens três caixas, cada uma contendo pelo menos um berlinde. Em cada passo, podes escolher duas das caixas e duplicar o número de berlindes numa delas tirando a quantidade necessária da outra. Será que consegues sempre que uma das caixas esteja vazia após um número finito de passos?