Uma final que não respeita os regulamentos e que é tematicamente desequilibrada

1. Determinem todos os números primos p tais que $p^2 - 6$ e $p^2 + 6$ são ambos primos.

2. Determinem todos os inteiros positivos n tais que $n^4 - n^3 + 3n^2 + 5$ é um quadrado perfeito.

3. Determinem todas as soluções inteiras da equação

$$(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + (y-1) \cdot y \cdot (y+1) = 24 - 9 \cdot xy$$

4. Mostrem que se o inteiro positivo n é par, então $2^{n!} - 1$ é um múltiplo de $n^2 - 1$.

5. Seja N um inteiro positivo. Um subconjunto S de $\{1, 2, \ldots, N\}$ diz-se *coimbrão* se não existirem três inteiros distintos a, b, c em S tais que $a|b$ e $b|c$. Determinem o maior número de elementos possível num conjunto coimbrão.

6. Numa circunferência existem 1000 pontos distintos. Escolhemos k desses 1000 pontos de maneira que nenhum par de pontos escolhidos é formado por pontos adjacentes. De quantas formas pode isto ser feito?

7. No triângulo agudo ABP (com $|AB| > |BP|$ as alturas são os segmentos $[BH]$, $[PQ]$ e $[AS]$. A reta QS intersecta a reta AP em C. A recta HS intersecta a recta BC em L. Supondo que $|HS| = |SL|$ e que HL é perpendicular a BC, determinem $\frac{|SL|}{|SC|}$.

8. As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, exteriormente tangentes, de raios r_1 e r_2 respetivamente, estão no interior de um triângulo retângulo $[ABC]$ de hipotenusa $[AB]$ para o qual se tem $|AC| = 4$ e $|BC| = 3$, de tal modo que AB e AC são tangentes a $\mathcal{C}_1$ e AB, BC são tangentes a $\mathcal{C}_2$. Determinem r_1 e r_2 se $4r_1 = 9r_2$.

Alfredo Costa delfos@mat.uc.pt