# A fórmula de Legendre

A única imagem conhecida de Adrien-Marie Legendre (1752-1832), numa caricatura feita por Julien-Léopold Boilly.

0. **Introdução.**

   (a) **(Problema da Final Nacional das XIX OPM).**
   Com quantos zeros consecutivos termina o número

   $$2001! = 2001 \times 2000 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1 \quad ?$$

   *Resolvam de modo elementar este problema. Ainda assim, é-vos permitido resolver este problema com a ajuda da fórmula de Legendre, introduzida mais abaixo, com a ressalva de que serão penalizados se não provarem corretamente a fórmula.*

   (b) Dado um primo $p$, denotemos por $v_p(a)$ o expoente de $p$ na factorização de $a$ em números primos. Note-se que $v_p(a) = 0$ se e só se $p$ não divide $a$. Note-se também que $a|b$ se e só se $v_p(a) \leq v_p(b)$ para qualquer primo $p$. A função $v_p$ é por vezes chamada de *valoração $p$-ádica*. Provem as seguintes propriedades da função $v_p$:

   i. $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

   ii. $\min\{v_p(a), v_p(b)\} \leq v_p(a+b)$; e se $v_p(a) < v_p(b)$, então $v_p(a) = v_p(a+b)$.

1. A *função de Legendre* associada ao primo $p$ é a função $e_p$ definida por $e_p(n) = v_p(n!)$, onde $n$ é um número natural. A expressão $\lfloor x \rfloor$ indica o *chão* do número real $x$, ou seja, o maior inteiro menor ou igual a $x$.

   Provem a Fórmula de Legendre, a seguir enunciada.

   **Teorema** (Fórmula de Legendre)**.** *Para qualquer primo $p$ e para qualquer inteiro positivo $n$, temos*

   $$e_p(n) = \sum_{i \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

2. A Fórmula de Legendre também admite a seguinte formulação:

   **Teorema** (Fórmula de Legendre - formulação alternativa)**.** *Para qualquer primo $p$ e para qualquer inteiro positivo $n$, seja $S_p(n)$ for a soma dos dígitos da expansão de $n$ na base $p$. Então temos*

$$e_p(n) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}.$$

   Provem esta formulação da Fórmula. Deverá ser útil a igualdade

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1},$$

   válida sempre que $x$ é um número real diferente de $1$ e $k$ é um número natural.

3. Apliquem a Fórmula de Legendre (na formulação que vos for conveniente) na resolução dos seguintes exercícios:

   (a) Seja $p$ um primo. Determinem o expoente de $p$ na factorização de $(p^m)!$ em números primos.

   (b) Determinem todos os inteiros positivos $n$ tais que $n!$ termina em exactamente $1000$ zeros.

   (c) Mostrem que $2^n$ não divide $n!$, para qualquer inteiro positivo $n$, e determinem todos os inteiros positivos $n$ tais que $2^{n-1}$ divide $n!$.

4. **(Problema de uma IMO antiga)**. Mostrem que, para quaisquer inteiros positivos $m, n$, o número

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

   também é um inteiro.

Na resolução dos dois últimos problemas, pode ser útil o Teorema de Euler.

**Teorema** (Teorema de Euler)**.** *Se $a$ é um inteiro que é primo com o inteiro positivo $n$, então*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

*onde $\varphi(n)$ é o número de inteiros positivos que são primos com $n$ e menores ou iguais a $n$.*

O Pequeno Teorema de Fermat é um caso especial do Teorema de Euler.

**Teorema** (Teorema de Fermat)**.** *Se o primo $p$ não divide o inteiro $a$, então*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

5. Sejam $n, q$ inteiros positivos tais que todos os divisores primos de $q$ são maiores do que $n$. Mostrem que $n!$ divide o produto $(q-1)(q^2-1)\cdots(q^{n-1}-1)$.

6. Provem que, para todos os inteiros positivos $n$, o produto $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$ é um múltiplo de $n!$.