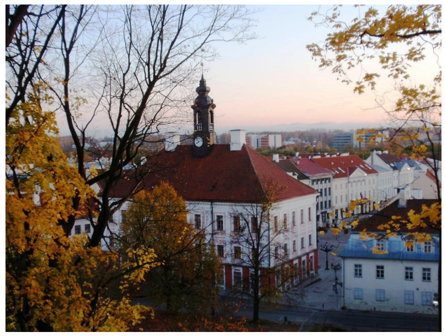
Baltic way

Durante este estágio (mais precisamente, de 14 a 18 de novembro) está a decorrer, em Tartu, na Estónia, a edição de 2024 da *Baltic way*.



Vista da câmara municipal de Tartu.

Flying Saucer, CC BY 3.0 <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0>, via Wikimedia Commons

"Each team in the competition consists of five students, and they are allowed to cooperate in any way they like during four hours. The team presents one solution for each of the twenty problems".

Prefácio de um livrete de Marcus Better com problemas e soluções da *Baltic way*.

1. No triângulo $[ABC]$, seja ℓ a bissectriz do ângulo externo a C. A linha reta que passa pelo ponto médio M do segmento AB e é paralela a ℓ intersecta a reta AC no ponto E. Determinem $|CE|$ se $|AC| = 7$ e $|CB| = 4$.

2. O quadrilátero $[ABCD]$ está inscrito numa circunferência de raio 1 de tal modo que uma diagonal, $[AC]$, é um diâmetro da circunferência, enquanto a outra diagonal, $[BD]$, tem o mesmo comprimento de $[AB]$. As diagonais intersectam-se no ponto P. Sabe-se que o comprimento de $[PC]$ é $\frac{2}{5}$. Qual é o comprimento do lado $[CD]$?

3. Usando cada um dois oito algarismos $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ apenas uma vez, forma-se um número A de três algarismos, dois números B e C de dois algarismos tais que $B < C$, e um número D de um algarismo. Os números são tais que $A + D = B + C = 143$. De quantas formas pode ser isto feito?

4. Seja $d(n)$ o número de divisores inteiros positivos de n. Determinem todos os tripletos (n, k, p) tais que n e k são inteiros positivos, p é um número primo, e $n^{d(n)} - 1 = p^k$.

5. Determinem todas as funções f reais de variável real definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que:

   (a) $f(1) = 1$,

   (b) $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ para todos os números reais $x, y, x+y$ diferentes de zero,

   (c) $(x+y)f(x+y) = xyf(x)f(y)$ para todos os números reais $x, y, x+y$ diferentes de zero.

6. Seja $d(n)$ o número de divisores inteiros positivos de n. Provem que existe uma infinidade de inteiros positivos n tais que $\lfloor \sqrt{3} \cdot d(n) \rfloor$ divide n.
   (N.b.: $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que é menor ou igual a x).

7. Determinem todas as soluções inteiras da equação $2x^6 + y^7 = 11$.

"The Baltic Way is a competition in mathematics for students in the secondary school. It was held for the first time in 1990 with participants from Estonia, Latvia and Lithuania. It is named after a mass demonstration in August 1989, when about two million inhabitants of these countries stood holding hands along the road from Tallinn to Vilnius on the 50th anniversary of the Molotov-Ribbentrop Pact."

Prefácio de um livrete de Rasmus Villemoes com problemas e soluções da *Baltic way*.

Fotos de: Gunārs Janaitis, Vilhelms Mihailovskis, Aivars Liepiņš, Vitālijs Stīpnieks, Uldis Briedis, Gunārs Janaitis