

# Final 2024

1. Provem que, para qualquer número primo  $p > 3$ , o número  $\frac{2^p + 1}{3}$  não é um múltiplo de 3.

2. Determinem todos os pares  $(x, y)$  de inteiros tais que

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

3. Sejam  $a, b$  e  $c$  os comprimentos dos lados de um triângulo que tem área  $A$ . Mostrem que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} A.$$

Em que condições se verifica a igualdade?

4. Seja  $S = \{105, 106, \dots, 210\}$ . Sabe-se que qualquer subconjunto de  $S$  com  $n$  elementos tem pelo menos dois elementos primos entre si. Qual é o menor valor que  $n$  pode assumir?

5. Determinem todas as funções  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  que verificam:

- para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , os números

$$x + f(y), f(f(y)) + z, f(f(z)) + f(x)$$

são as medidas dos lados de um triângulo;

- para todo o  $a \in \mathbb{R}^+$  existe  $b \in \mathbb{R}^+$  tal que  $f(b) < a$ .