

Final 2024

1. Provem que, para qualquer número primo $p > 3$, o número $\frac{2^p + 1}{3}$ não é um múltiplo de 3.
2. Determinem todos os pares (x, y) de inteiros tais que

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x$$

3. Sejam a, b e c os comprimentos dos lados de um triângulo que tem área A . Mostrem que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} A.$$

Em que condições se verifica a igualdade?

4. Seja $S = \{105, 106, \dots, 210\}$. Sabe-se que qualquer subconjunto de S com n elementos tem pelo menos dois elementos primos entre si. Qual é o menor valor que n pode assumir?
5. Determinem todas as funções $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verificam:

- para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, os números

$$x + f(y), f(f(y)) + z, f(f(z)) + f(x)$$

são as medidas dos lados de um triângulo;

- para todo o $a \in \mathbb{R}^+$ existe $b \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(b) < a$.