Ô Canada!

A jornada de hoje é uma coletânea de problemas de competições canadianas.

1. Determinem todos os inteiros positivos que são k vezes a soma dos seus algarismos, onde k é a soma do número de províncias com o número de territórios do Canadá.

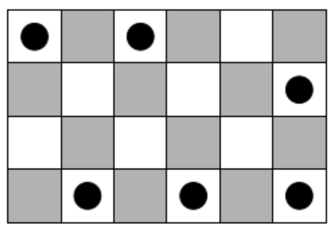
2. No triângulo $[ABC]$ temos $B\hat{A}C = 80^\circ$ e $A\hat{C}B = 40^\circ$. O ponto D é um ponto na semirreta BC além de C tal que $\overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$. Determinem o valor de $A\hat{D}B$.

3. Determinem todos os pares (m, n) de inteiros positivos tais que $m^3 - n^3 = 5mn + 43$.

4. Determinem todos os conjuntos finitos M de números reais tais que, sempre que um número x pertence a M, então o número $x^2 - 3|x| + 4$ também pertence a M.

5. O quadrilátero $[ABCD]$ é um quadrilátero convexo tal que $B\hat{A}C = 15^\circ$, $C\hat{A}D = 30^\circ$, $A\hat{D}B = 90^\circ$ e $B\hat{D}C = 45^\circ$. Determinem $A\hat{C}B$.

6. Sejam m e n inteiros positivos. Um tabuleiro quadriculado $2m \times 2n$ está pintado de forma axadrezada. Determinem o número de maneiras de colocar mn fichas nos quadrados brancos, com no máximo uma ficha por quadrado, de modo a que não existam duas fichas em quadrados brancos diagonalmente adjacentes. Um exemplo de uma forma de colocar as fichas quando $m = 2$ e $n = 3$ é mostrado abaixo.



7. Uma função $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ diz-se que é *canadiana* se satisfaz a igualdade

$$\mathrm{mdc}\Big(f(f(x)), f(x+y)\Big) = \mathrm{mdc}(x, y)$$

para quaisquer inteiros positivos x e y. Determinem todos os inteiros positivos m tais que se tem $f(m) = m$ para qualquer função canadiana.