

Olimpíada matemática argentina



1. Consideram-se conjuntos de números reais $\{x_1, x_2, \dots, x_{20}\}$, todos positivos e menores do que 1, tais que

$$x_1 x_2 \cdots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_{20}).$$

De entre estes conjuntos, determinem aquele para o qual o produto $x_1 x_2 \cdots x_{20}$ é máximo.

2. Consideramos os 2024 números inteiros n , de 1 a 2024, inclusive. Determinem quantos de estes números são tais que $n^3 + 3^n$ é múltiplo de 5.
3. No quadrado $[ABCD]$ de lado com comprimento 10, sejam M e N os pontos médios de $[AB]$ e $[BC]$ respectivamente. Se os segmentos $[AN]$ e $[DM]$ se intersectam em Q , calculem a soma das áreas dos triângulos $[AQM]$ e $[DQN]$.

4. Temos 1000 caixas, cada uma com quatro fichas: três fichas com o número 9, e uma ficha com o número 1. Qual é o menor múltiplo de 99 que se pode formar usando todas as fichas de um grupo de caixas, alinhando convenientemente todas as fichas usadas ?
5. O trapézio $[ABCD]$ de bases $[AB]$ e $[CD]$ e lados não paralelos $[BC]$ e $[DA]$ é tal que se tem $\angle DAB = 90^\circ$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{CD} = 3$ e $\overline{AD} = 4$. Sejam E, G, H os circuncentros dos triângulos $[ABC]$, $[ACD]$ e $[ABD]$ respetivamente. Determinem a área do triângulo $[EGH]$.
6. No planeta Alfa, usa-se um alfabeto de 100 letras. Uma *palavra* no planeta Alfa é uma sequência de letras que satisfaz as seguintes condições:
- Não tem duas letras consecutivas iguais. Por exemplo, COOPERAR e PASSEAR não são palavras.
 - Não tem duas letras distintas XY que figurem na ordem $XYXY$, mesmo que outras letras apareçam de perrengue. Por exemplo, PALPAR e CINCUENTA não são palavras.

Determinem o maior comprimento que uma palavra pode ter no planeta Alfa.

7. Num torneio de sueca, inscrevem-se $2k$ pessoas. Jogam-se todas as partidas possíveis com a condição de que, em cada partida, cada um dos quatro jogadores conhece o seu parceiro e não conhece nenhum dos seus dois opositores. Determinem o número máximo de partidas que pode ocorrer no torneio.

