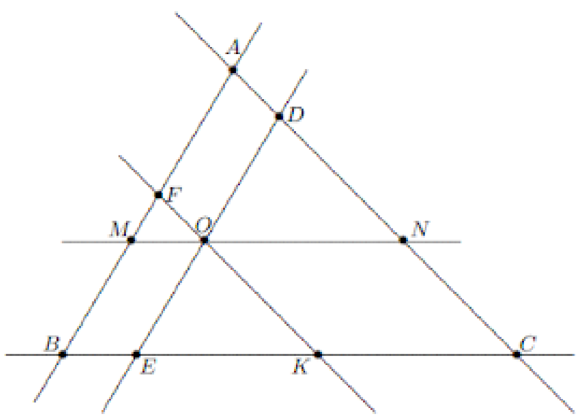
Benelux

A jornada de hoje é uma coletânea de problemas de competições do Benelux.

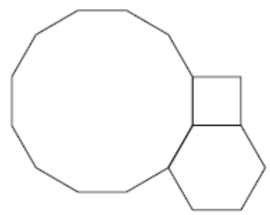
1. Através de um ponto interior O do triângulo $[ABC]$, desenham-se três retas, paralelas a cada um dos lados, intersectando-se nos pontos ilustrados na figura seguinte.



Determinem, com prova, o valor de

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{CN}}{\overline{CA}}.$$

2. Os vértices de um quadrado, de um hexágono regular, e de um dodecágono regular podem ser acoplados num ponto de modo a formarem um ângulo giro de 360° (ver figura).



Determinem todos os triplos $a, b, c \in \mathbb{N}$, com $a < b < c$, para os quais os ângulos de um a-ágono regular, de um b-ágono regular e de um c-ágono regular também podem formar 360° .

3. Um conjunto finito de inteiros diz-se *mau* se a sua soma é 2010. Um conjunto finito de inteiros diz-se um *conjunto do Benelux* se nenhum dos seus subconjuntos é mau. Determinem o mais pequeno inteiro n tal que o conjunto $\{502, 503, 504, ..., 2009\}$ é uma união disjunta de n conjuntos do Benelux.

4. Um par ordenado de inteiros (m, n) com $1 < m < n$ diz-se um *par do Benelux* se as seguintes duas condições são satisfeitas: m tem os mesmo divisores primos de n, e $m+1$ tem os mesmos divisores primos de $n+1$.
   (a) Encontrem três pares do Benelux (m, n) com $m \leqslant 14$.
   (b) Provem que existe uma infinidade de pares do Benelux.

5. Determinem todos os pares (x, y) de inteiros que satisfazem $x^2 + y^2 + 3^3 = 456\sqrt{x-y}$.

6. Determinem o maior inteiro positivo N que satisfaz a seguinte propriedade:
   existem inteiros $x_1, \cdots, x_N$ tais que $x_i^2 - x_i x_j$ não é múltiplo de 1111 para qualquer $i \neq j$.

7. Determinem todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.