

Final geométrica

1. Seja \mathcal{C} a circunferência inscrita num triângulo cujo perímetro é 18. Um segmento tangente a \mathcal{C}_1 é paralelo a um lado do triângulo e o comprimento desse segmento é 2. Prove que o comprimento do lado paralelo é 3 ou 6.
2. Os segmentos $[BD]$ e $[CE]$ são alturas de um triângulo acutângulo $[ABC]$. O ponto simétrico a E relativamente a $[BD]$ está no circuncírculo de $[ABC]$. Determinem a razão $\overline{AD} : \overline{CD}$.
3. A circunferência ω está inscrita no triângulo $[ABC]$, com $\angle A = 43^\circ$. As bissetrizes dos ângulos externos $\angle B$ e $\angle C$ intersectam-se no ponto D . A tangente a ω que passa por D toca ω no ponto E . Determinem a medida do ângulo $\angle BEC$.
4. Num triângulo escaleno $[ABC]$, o ângulo $\angle B$ mede 130° . O ponto H é o pé da altura do triângulo que passa por B . Nos lados $[AB]$ e $[BC]$ escolhem-se pontos D e E , respetivamente, de tal modo que $\overline{DH} = \overline{EH}$ e $[ADEC]$ é cíclico. Determinem a medida do ângulo $\angle DHE$.
5. Os números x, y, z, t pertencem ao intervalo $]0, \pi/2]$ e satisfazem a igualdade

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \cos^2 t = 1.$$

Determinem, com prova, o valor mínimo para a soma $\cotg x + \cotg y + \cotg z + \cotg t$.

6. O triângulo escaleno $[ABC]$ de perímetro 12 está inscrito na circunferência ω . Os pontos P e Q são os pontos médios dos arcos ABC e ACB da circunferência ω , respetivamente. A tangente a ω no ponto A intersecta a semirreta PQ no ponto R . O ponto médio de $[AR]$ pertence à reta BC . Determinem o comprimento de BC .