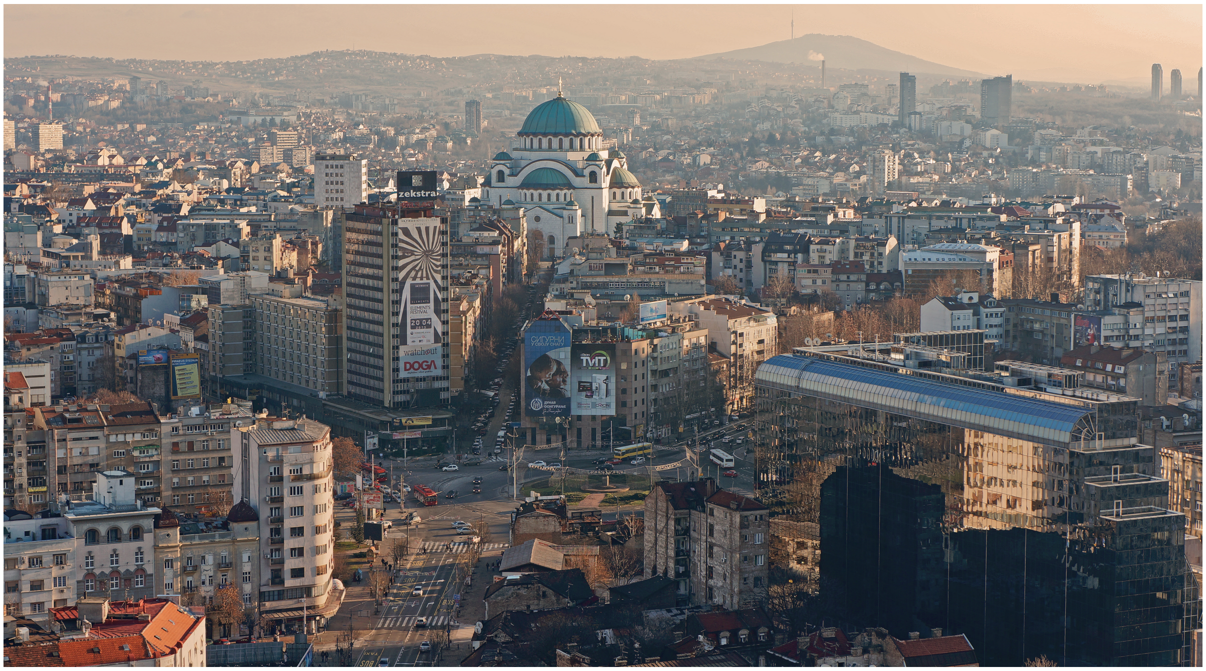
Seleção de problemas de provas sérvias e croatas



Belgrado

1. Um *quadrado mágico* é um tabuleiro $n \times n$ em que os números de 1 a n^2 são escritos de tal modo que em cada linha, coluna e em ambas as diagonais, a soma dos números é sempre a mesma.

   (a) Deem um exemplo de um quadrado mágico 3×3 e um exemplo de um quadrado mágico 4×4.

   (b) Dado um quadrado mágico 2025×2025, qual é a soma comum das linhas, colunas e diagonais ?

2. Um certo prisma retangular é tal que todas as arestas e a diagonal espacial são de comprimento inteiro, tendo duas das arestas comprimento 9 e 12, respetivamente. Qual é o comprimento da terceira aresta ?

3. Sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles $[ABC]$ com catetos $[AC]$ e $[BC]$ de comprimento 2025, foram construídos quadrados $[ABLK]$, $[BCNM]$ e $[CAQP]$ fora do triângulo. Determinem a área e o perímetro do hexágono $[KLMNPQ]$.

4. Quantos números de cinco algarismos da forma $(37abc)_{10}$ existem tais que $(37abc)_{10}$, $(37bca)_{10}$ e $(37cab)_{10}$ são múltiplos de 37 ?

5. Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$. Provem a desigualdade

$$a\sqrt{2b+1} + b\sqrt{2c+1} + c\sqrt{2a+1} \leq \sqrt{2 - (a^2 + b^2 + c^2)}.$$

6. O ângulo no vértice B de um triângulo $[ABC]$ é 120°. Sejam A_1, B_1 e C_1 os pontos nos segmentos $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$, respetivamente, tais que AA_1, BB_1 e CC_1 são bissectrizes do triângulo $[ABC]$. Determinem a medida do ângulo $\angle A_1B_1C_1$.

7. Determinem as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(1) \geq 0$ e $f(x) - f(y) \geq (x - y)f(x - y)$ para quaisquer números reais x, y.

Zagreb