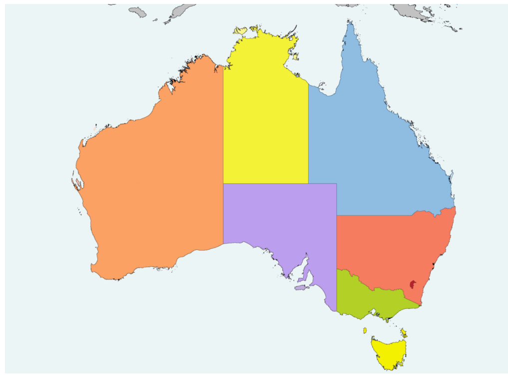
Austrália



Os problemas de hoje foram retirados de provas australianas. O problema 0 é um extra que serve como exercício de aquecimento e como bónus!

0. No ensino básico, já não se ensina a chamada *fórmula resolvente da equação do segundo grau*: se a, b, c são números reais tais que $a \neq 0$, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem soluções reais se e só $b^2 - 4ac \geq 0$, e tais soluções são
$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad e \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
Ou, abreviadamente, a solução geral da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é o chamado *discriminante* do polinómio $ax^2 + bx + c$. Reparemos que a equação tem exatamente duas soluções reais diferentes se e só se $\Delta > 0$, e exatamente uma solução real se e só se $\Delta = 0$.

   - Se és um elemento da equipa que ainda está no ensino básico, faz o seguinte:
     - Deduz tu mesmo a fórmula resolvente da equação do segundo grau, começando por multiplicar ambos os membros da equação por $4a$, e somando depois b^2 a ambos os membros da equação equivalente daí resultante.
     - Resolve as equações $x^2 - 13x + 22 = 0$, $x^2 + 18x + 81 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ e $6x^2 + x = 1$.
     - Resolve o seguinte exercício proposto numas olimpíadas australianas para iniciados: "Quantos inteiros satisfazem a equação $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-11x+30} = 1$?"

1. No triângulo $[ABC]$, temos $\angle BAC = 22^\circ$. Uma circunferência, de centro O, tem as retas AB, AC e BC como tangentes. Determinem $\angle BOC$.

2. A Codésia é um país com um número elevado de cidades, com todos os códigos postais entre 1 e 9999. Nenhum código postal em Codésia começa com 0. Por exemplo, 15 é um código postal de Codésia, mas 015 não é. Dois códigos postais são *espelhos um do outro* se a expressão em algarismos de um deles se obtém da do outro lendo-a ao contrário. Por exemplo, os códigos postais 53447 e 74435 são espelhos um do outro. Determinem o mais pequeno código postal de Codésia que pode ser escrito como a diferença de dois códigos que são espelhos um do outro.

3. Determinem todos os triplos (x, y, z) de números reais tais que simultaneamente temos $xy+1 = 2z$, $yz + 1 = 2x$, $zx + 1 = 2y$.

4. Sejam m e n inteiros positivos tais que $2001m^2 + m = 2002n^2 + n$. Provem que $m - n$ é um quadrado perfeito.

5. Uma circunferência de centro O tem AB como diâmetro. Seja C um ponto na circunferência diferente de A e de B; seja D um ponto em AB tal que $\angle CDB = 90^\circ$; e seja M o ponto de BC tal que $\angle BMO = 90^\circ$. Sabendo que $|DB| = 3 \times |OM|$, calculem $\angle ABC$.

6. Seja $[ABC]$ um triângulo. Uma circunferência intersecta o lado $[BC]$ nos pontos U e V, o lado $[CA]$ nos pontos W e X, e o lado $[AB]$ nos pontos Y e Z. Os pontos U, V, W, X, Y, Z estão na circunferência, por esta ordem. Admitam que $|AY| = |BZ|$ e $|BU| = |CV|$. Provem que $|CW| = |AX|$.

7. Seja $f(x) = x^2 - 45x + 2$. Determinem todos os inteiros $n \geq 2$ tais que exatamente um dos números

$$f(1), f(2), \ldots, f(n)$$

é múltiplo de n.